

LIVRO 2

**PROPRIDADES MECÂNICAS
E
COEFICIENTES DE DILATAÇÃO**

**Antonio Carvalho
Julho 2022**

PREFÁCIO



O Xará, Francisco Xavier de Carvalho, é meu parceiro e amigo desde 1971, quando iniciei minhas atividades profissionais. Sempre tive com ele grande afinidade. As ideias inovadoras expostas nestes livros foram criticadas e amenizadas por ele.

Mais de três décadas separam estas obras do lançamento, em 1992, do livro **FIBERGLASS X CORROSÃO**, que também tive a honra de prefaciar. Como o livro anterior, também estes são uma luz para a tecnologia dos compósitos.

Neste intervalo de mais de três décadas, o autor participou como consultor dos projetos mais importantes em compósitos realizados na América do Sul. Ele foi incentivador e líder das comissões que criaram as primeiras normas brasileiras para compósitos, bem como membro de comissões internacionais de normalização, como a ISO 14692.

O Carvalho sempre me surpreendeu pelas suas soluções inovadoras e ousadas, sempre suportadas por evidências de resultados obtidos e relatados na literatura. Além dessa capacidade de interpretação e de inovação, ele nunca deixou de divulgar suas conclusões através de trabalhos apresentados em congressos nacionais e internacionais, o que lhe trouxe como resultado o respeito e o reconhecimento da comunidade de compósitos no Brasil e no exterior.

Os seis livros agora publicados vão muito além do clássico **FIBERGLASS X CORROSÃO**, de 1992. Novos conceitos são introduzidos e muitos dos conceitos hoje aceitos são desafiados a toda hora. Estes livros abrem caminhos novos, claros e seguros para o desenvolvimento dos compósitos.

A maioria dos conceitos apresentados nestes livros são originais e inovadores, desenvolvidos pelo autor e apresentados de maneira objetiva e clara. Estes livros são uteis para profissionais, acadêmicos e estudantes.

Os profissionais vão encontrar soluções para problemas considerados insolúveis.

Os acadêmicos vão encontrar abordagens inéditas

Os estudantes vão encontrar descrições que facilitam o entendimento de forma rápida, segura e bem fundamentada em conceitos básicos.

A indústria dos compósitos pode considerar estas obras como um tratado completo para desenvolver produtos para uso industrial, cobrindo as matérias primas, passando pelo projeto e cálculo estrutural, variáveis do processo e até mesmo a solução do problema da durabilidade.

Estes livros são marcos para a tecnologia dos compósitos. Junto me à comunidade de compósitos para agradecer a mais esta contribuição que, somada às demais, faz de Antônio Carvalho o maior agente para o desenvolvimento dos compósitos no Brasil.

Francisco Xavier de Carvalho



PREFÁCIO DO AUTOR

Quando perguntado sobre a origem das ideias em sua magnífica obra sobre a Teoria da Gravitação Universal, Isaac Newton respondeu:

“Eu pensei no assunto”

Se me perguntassem de onde tirei as ideias para escrever esses livros eu diria essencialmente a mesma coisa. Desde o início de minha vida profissional, em 1971, sempre trabalhei como assistente técnico para compósitos. Nunca fiz outra coisa, e isso me fez pensar muito no assunto.

Estes anos focados em um único tema produziram seis livros.

- Durability of Industrial Composites
- Introdução aos compósitos Industriais
- Cura e pós-cura de resinas poliéster e vinil éster
- Propriedades mecânicas dos compósitos.
- Cálculo estrutural de tanques e tubos de compósitos
- Manual do usuário de compósitos industriais

Os seis livros estão recheados de conceitos, de explicações e de exemplos numéricos cuidadosamente escolhidos para guiar e formar especialistas. A abordagem profunda e detalhada procura atender as necessidades de projetistas, fabricantes, compradores e usuários de equipamentos industriais de compósitos.

Eu coloquei nestes livros praticamente tudo que os profissionais precisam saber para construir carreiras sólidas. O esforço foi grande. A atenção aos detalhes foi imensa. É minha esperança que os leitores encontrem nesses livros a inspiração para criar novos conhecimentos.

Mas, hábitos arraigados são difíceis de mudar. Eu sei que muitas das inovações aqui introduzidas não terão impacto imediato na tecnologia dos compósitos. Elas vão influenciar o futuro, quando os jovens leitores de hoje assumirem posições de comando.

Antonio Carvalho

Passos, Minas Gerais, 11 de dezembro de 2025.

CAPÍTULO 0

O ensaio de queima

1 – Introdução. Este livro foi escrito para eliminar as intermináveis discussões e as enormes incertezas sobre as propriedades mecânicas dos compósitos. Ele contém os valores corretos das propriedades mecânicas dos compósitos, essenciais para projetistas e analistas de equipamentos sujeitos a esforços mecânicos. Essa façanha é atingida usando as propriedades de lâminas padrão, amplamente reconhecidas e aceitas.

O uso de propriedades padrão facilita a vida de fabricantes, projetistas e analistas. O único parâmetro de processo a ser controlado pelos fabricantes é a quantidade de fibras por unidade de área dos equipamentos. A quantidade de resina e a espessura final do laminado deixam de ter importância, desde que as quantidades de reforço estabelecidas no projeto sejam usadas na fabricação.

Para determinar a capacidade estrutural de equipamentos existentes, os inspetores simplesmente medem as espessuras dos laminados e suas composições. As espessuras são medidas com paquímetro. As composições são determinadas por simples ensaio de queima. O conhecimento dessas grandezas permite ao inspetor determinar com confiança as propriedades reais dos laminados e a capacidade estrutural dos equipamentos. Tudo isso feito com rapidez, sem requerer ensaios mecânicos e com custo irrisório.

O que segue é uma elaboração dos argumentos em favor do uso de propriedades padrão para laminados de compósitos.

2 – Benefício ao comprador. O comprador simplesmente informa as dimensões dos equipamentos, as cargas atuantes e a norma desejada. O resto é problema do projetista, do fabricante e do inspetor.

3 – Benefício ao projetista. O projetista determina a composição do laminado usando as propriedades padrão, amplamente conhecidas e aceitas. Em seguida ele especifica, para a composição calculada, as quantidades de fibras por unidade de área. Essas quantidades devem ser controlada fielmente pelo fabricante, para assegurar o sucesso estrutural do equipamento.

4 – Benefício ao fabricante. A única preocupação do fabricante é com o controle das quantidades de fibras especificadas pelo projetista. Esse controle é feito pelo número de lâminas e pela calibração das máquinas usadas na produção. As quantidades de resina e as espessuras finais dos laminados produzidos deixam de ser preocupação para o fabricante.

O fabricante simplesmente controla as quantidades de fibras por unidade de área, de acordo com os valores especificados pelo projetista. A quantidade de resina é decidida por ele, como melhor lhe aprouver. Alguns usam excesso de resina para aumentar a velocidade do processo. Outros preferem usar pouca resina, para reduzir custo.

5 – Benefício ao inspetor. O inspetor apenas confirma se as quantidades de fibras correspondem às especificadas, sem se preocupar com teores de resina ou com espessuras. Com essas informações ele computa as propriedades do laminado e estabelece, de imediato e com confiança, a capacidade estrutural do equipamento. Tudo isso sem fazer um único ensaio mecânico.

A medição dos teores de fibras é feita usando simples e rápidos ensaios de queima.

6 – O ensaio de queima. O ensaio de queima é simples, rápido e tem custo irrisório.

6.1 – Significado. Esse ensaio mede os teores e as quantidades de matérias primas por unidade de área de amostras extraídas de equipamentos de compósitos. Com essas informações, o inspetor pode computar as propriedades mecânicas, as relações de Poisson, os coeficientes de dilatação e a capacidade estrutural dos equipamentos.

O ensaio é feito queimando corpos de prova extraídos de equipamentos. As dimensões dos corpos de prova devem ser as maiores possíveis, compatíveis com o tamanho dos cadinhos de queima. A maioria dos ensaios usa corpos de prova retangulares, de dimensões entre 30 mm e 50 mm.

Nota: Nos equipamentos de espessura maior que a profundidade do cadinho, os corpos de prova podem ser partidos em duas ou mais partes, de espessura menor.

O número de corpos de prova não precisa ser grande. A queima de apenas um corpo de prova é suficiente para dar boa definição ao laminado. Se mais de um corpo de prova for queimado, os resultados devem ser expressos como a média aritmética das medições.

6.2 – Equipamentos para execução do ensaio de queima

- *Mufra para receber cadinho de diâmetro até 10 cm*
- *Cadinho ou prato cerâmico com diâmetro entre 8 cm e 10 cm*
- *Balança analítica com capacidade para 1000 gramas*
- *Pinça para separação das fibras*
- *Transferidor para medir o ângulo de orientação das fibras UD*
- *Paquímetro para medir a espessura do corpo de prova*
- *Régua para medir as dimensões do corpo de prova*

6.3 – Preparação para o ensaio

- Aquecer a mufla para temperatura entre 700 C e 800 C
- Cortar corpos de provas retangulares com dimensões entre 30 mm e 50 mm. Uma das arestas do corpo de prova deve ser cortada paralela ao eixo longitudinal do laminado, para facilitar a medição dos ângulos das fibras UD.
- Limpar e secar o corpo de prova

6.4 – Procedimento

- Medir as dimensões e computar a área superficial do corpo de prova
- Medir a espessura do corpo de prova
- Pesar o cadinho vazio
- Pesar o cadinho com o corpo de prova
- Colocar na mufla aquecida o cadinho com o corpo de prova
- Esperar a queima completa da resina. Isso pode demorar algumas horas, dependendo da espessura do corpo de prova e da temperatura da mufla.
- Pesar o cadinho contendo os resíduos de fibras de vidro e de areia
- Medir com transferidor os ângulos formados pelas fibras UD com o eixo longitudinal do laminado
- Separar com pinça, para pesagem individual, os resíduos de fibras picadas e de fibras UD. O resíduo de areia permanece no cadinho.
- Pesar individualmente o cadinho contendo os resíduos de areia, fibras picadas, fibras UD, etc.

6.5 – Cálculo dos teores por peso

O conhecimento dos teores por peso permite determinar as propriedades e a capacidade estrutural do equipamento

Peso do corpo de prova (CP)

$$CP = (\text{Peso cadinho} + CP) - (\text{Peso cadinho})$$

Teor de resina (res)

$$(\text{res}) = \frac{(\text{Peso cadinho} + CP) - (\text{Peso cadinho} + \text{resíduos})}{CP}$$

Teor de fibras picadas

$$(\text{pic}) = \frac{(\text{Peso cadinho} + \text{Fibras picadas}) - (\text{Peso cadinho})}{CP}$$

Teor de fibras UD

$$(\text{UD}) = \frac{(\text{Peso cadinho} + \text{Fibras UD}) - (\text{Peso cadinho})}{CP}$$

Teor de areia

$$(\text{areia}) = \frac{(\text{Peso cadinho} + \text{Areia}) - (\text{Peso cadinho})}{CP}$$

6.6 – Cálculo das quantidades de matérias primas por unidade de área

As quantidades de matérias primas por unidade de área são úteis para o fabricante, que as compara com os valores especificados pelo projetista. Esse conhecimento é usado pelo fabricante como ferramenta de controle do processo. Os fabricantes geralmente não informam dados de projeto aos compradores.

Peso de resina por unidade de área

$$\left[\begin{array}{l} \text{peso} \\ \text{unidade} \end{array} \begin{array}{l} \text{resina} \\ \text{área} \end{array} \right] = \frac{(\text{res}) \times (CP)}{\text{Área do CP}}$$

Peso de fibras picadas por unidade de área

$$\left[\begin{array}{l} \text{peso} \\ \text{unidade} \end{array} \begin{array}{l} \text{picadas} \\ \text{área} \end{array} \right] = \frac{(\text{pic}) \times (CP)}{\text{Área do CP}}$$

Peso de fibras UD por unidade de área

$$\left[\begin{array}{l} \text{peso} \\ \text{unidade} \end{array} \begin{array}{l} \text{UD} \\ \text{área} \end{array} \right] = \frac{(UD) \times (CP)}{\text{Área do CP}}$$

Peso de areia por unidade de área

$$\left[\begin{array}{l} \text{peso} \\ \text{unidade} \end{array} \begin{array}{l} \text{areia} \\ \text{área} \end{array} \right] = \frac{(\text{areia}) \times (CP)}{\text{Área do CP}}$$

7. Relatório

O relatório deve conter todas as medições feitas no ensaio

- Teores por peso das matérias primas
- Pesos das matérias primas por unidade de área
- Espessura do corpo de prova
- Área superficial do corpo de prova
- Ângulos formados pelas fibras UD com o eixo longitudinal do corpo de prova

Apêndice 1

Computação das propriedades do laminado

Os teores de fibras e de resina são usados para computar as propriedades do laminado nas direções axial “x” e circunferencial “y” do equipamento. As propriedades obtidas a partir dos teores medidos são precisas e confiáveis.

As propriedades das lâminas UD padrão dependem do ângulo formado entre as fibras e o eixo longitudinal (eixo x) do equipamento. A tabela 1 mostra essa variação

Propriedade	UD55 (filament winding)	UD70 (filament winding)	UD90 (Hoop-chop)	UD0 (Pultrusão)
E_x (kg/cm ²)	96 300	92 800	100 000	400 000
E_y (kg/cm ²)	170 800	298 200	400 000	100 000
ν_{xy} (----)	0,39	0,18	0,08	0,30
ν_{yx} (----)	0,70	0,59	0,30	0,08
G_{xy} (kg/cm ²)	101 200	66 000	35 000	35 000
α_x (1/°C)	$32,6 \cdot 10^{-6}$	$40,6 \cdot 10^{-6}$	$45,0 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$
α_y (1/°C)	$19,9 \cdot 10^{-6}$	$11,8 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$45,0 \cdot 10^{-6}$
α_{xy} (1/°C)	$\pm 32,5 \times 10^{-6}$	$\pm 24,0 \times 10^{-6}$	0	0
β_x	0,13	0,12	0,18	0,04
β_y	0,09	0,09	0,04	0,18
β_{xy}	$\pm 0,13$	$\pm 0,09$	0	0

Tabela 1
Propriedades das lâminas UD padrão nas direções “x” e “y”

1 - Densidade

A densidade do laminado é obtida em função do teor de resina.

$$[\text{Densidade}] = \frac{3,12}{1,20 + 1,40(\text{res})} \text{ g/cm}^3$$

2 – Secura K

A secura do laminado mede a diferença entre a quantidade de resina real, presente no laminado, e a quantidade padrão idealizada pelo projetista. A secura indica apenas se o laminado contém mais ou menos resina que a quantidade padrão, não servindo como indicador de qualidade.

$$K = (\text{res}) - \left[\frac{3}{7}(\text{UD}) + \frac{7}{3}(\text{pic}) + \frac{2}{8}(\text{areia}) \right]$$

Se $K > 0$, o laminado tem excesso de resina. Se $K < 0$, ele é seco em relação ao padrão.

3 – Módulos nas direções “x” (longitudinal) e “y” (circunferencial)

Todos os módulos do laminado, inclusive o de cisalhamento, são obtidos com grande precisão usando as fórmulas abaixo.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = [\text{Densidade}] \begin{bmatrix} 163000(\text{pic}) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 35500(\text{areia}) + 25000 \times K \\ 163000(\text{pic}) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 35500(\text{areia}) + 25000 \times K \\ 63000(\text{pic}) + 0,74G_{UD}(UD) + 13600(\text{areia}) + 9610 \times K \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

4 – Relações de Poisson nas direções “x” e “y”

$$v_{yx} = [\text{Densidade}] [0,70 \times (\text{pic}) + 0,74 \times v_{UD}^{yx} \times (UD) + 0,18 \times (\text{areia}) + 0,25 \times K]$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

5 – Coeficientes de dilatação térmica nas direções “x” e “y”

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = [\text{Densidade}] \begin{bmatrix} \frac{4,08 \times (\text{pic}) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times (UD) + 0,46 \times (\text{areia}) + 1,50 \times K}{E_x} \\ \frac{4,08 \times (\text{pic}) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times (UD) + 0,46 \times (\text{areia}) + 1,50 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

6 – Coeficientes de dilatação hídrica nas direções “x” e “y”

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = [\text{Densidade}] \begin{bmatrix} \frac{31000 \times (\text{pic}) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times (UD) + 5300 \times (\text{areia}) + 10000 \times K}{E_x} \\ \frac{31000 \times (\text{pic}) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times (UD) + 5300 \times (\text{areia}) + 10000 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

Apêndice 2

Computação da capacidade estrutural do equipamento

A capacidade estrutural do equipamento depende do ambiente em que ele trabalha e da sua geometria.

Os equipamentos para uso em ambientes quimicamente agressivos devem ter alongamentos inferiores a 0,001 (ASME RTP1). Os que trabalham em contato com produtos não agressivos (água e esgoto urbano) podem ter alongamentos até 0,0035 (AWWA C950).

A geometria do equipamento define se o laminado trabalha sob tração ou flexão.

1 – Equipamentos cilíndricos em ambientes agressivos. A capacidade estrutural de tubos e tanques verticais cilíndricos trabalhando sob pressão em ambientes agressivos é obtida pela expressão clássica

$$P \leq \frac{2 \times \epsilon_{adm} \times (E_y \times t)_{med}}{D}$$

Onde

P é a pressão interna máxima admitida

D é o diâmetro do tanque ou tubo

$\epsilon_{adm} = 0,001$ (ASME RTP1)

$\epsilon_{adm} = 0,0025$ (Metade do umbral de infiltração)

$(E_y \times t)_{med}$ = módulo circunferencial e espessura medidos no ensaio de queima

2 – Equipamentos cilíndricos em ambientes não agressivos. A capacidade estrutural de tubos e tanques verticais cilíndricos trabalhando sob pressão em ambientes não agressivos é obtida pela expressão clássica

$$P \leq \frac{2 \times \epsilon_{adm} \times (E_y \times t)_{med}}{D}$$

Onde

P é a máxima pressão interna admitida

D é o diâmetro do tanque ou tubo

$\epsilon_{adm} = 0,0035$ (AWWA C950)

$\epsilon_{adm} = 0,0040$ (Metade do umbral de exudação)

$(E_y \times t)_{med}$ = módulo circunferencial e espessura medidos no ensaio de queima

Exemplo numérico 1 – Vamos ilustrar o método computando a capacidade estrutural de um tanque vertical cilíndrico de altura $H = 7,1$ m e diâmetro $D = 12,3$ m, de densidade $1,05$ g/cm³.

O ensaio de queima revelou os teores

(res) = 0,40

(UD90) = 0,60

Partindo desse resultado, os módulos de elasticidade do laminado são calculados pelas expressões

$$E_y = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \times [0,74E_{UD}^y(UD) + 25\,000K]$$

$$E_x = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \times [0,74E_{UD}^x(UD) + 25\ 000K]$$

Onde a secura do laminado é

$$K = (res) - \frac{3}{7}(UD) = (0,40) - \frac{3}{7} \times (0,6) = 0,143$$

O valor positivo da secura, $K = 0,143$, indica excesso de resina em relação ao padrão 30% para fibras UD. Isso em nada afeta o desempenho do tanque.

Consultando a tabela de valores padrão, obtemos para as fibras UD90

$$E_{UD}^y = 400\ 000\ \text{kg/cm}^2$$

$$E_{UD}^x = 100\ 000\ \text{kg/cm}^2$$

Esses são os valores padrão para os módulos de laminados de fibras UD nas direções “x” e “y”. Esses valores são universalmente aceitos e estão corretos para lâminas com 70% de vidro e 30% de resina. Os módulos reais são obtidos entrando esses valores nas equações acima

$$E_y = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times (0,40)} \right] \times [0,74 \times 400\ 000 \times (0,60) + 25\ 000 \times 0,143] = 329\ 400\ \text{kg/cm}^2$$

$$E_x = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times (0,40)} \right] \times [0,74 \times 100\ 000 \times (0,60) + 25\ 000 \times 0,143] = 87\ 200\ \text{kg/cm}^2$$

A espessura medida na parte inferior do costado é

$$t = 3,75\ \text{cm}$$

Com essas informações podemos calcular a capacidade estrutural do tanque

Cenário 1. O tanque armazena produtos agressivos

$$P \leq \frac{2 \times \epsilon_{adm} \times (E_y \times t)_{med}}{D}$$

$$P \leq \frac{2 \times 0,001 \times (329\ 400 \times 3,75)_{med}}{1230}$$

$$P \leq 2,0\ \text{kg/cm}^2$$

Essa é a máxima pressão hidrostática suportada pelo tanque. Ela deve ser comparada com a pressão hidrostática na parte inferior do tanque, de altura $H = 7,1\ \text{m}$.

$$P = 0,1 \times 7,1 \times 1,05 = 0,75\ \text{kg/cm}^2$$

A capacidade estrutural desse tanque, supondo contato com produtos químicos agressivos, excede as necessidades da aplicação pelo fator

$$\text{Fator} = \frac{2,0}{0,75} = 2,7$$

Cenário 2. O tanque armazena água ou esgoto urbano

$$P \leq \frac{2 \times \epsilon_{adm} \times (E_y \times t)_{med}}{D}$$

$$P \leq \frac{2 \times 0,0035 \times (329\,400 \times 3,75)_{med}}{1230}$$

$$P \leq 7,1 \text{ kg/cm}^2$$

A capacidade estrutural desse tanque, supondo contato com água ou esgoto, excede a necessidade da aplicação pelo fator

$$\text{Fator} = \frac{7,1}{0,75} = 9,5$$

3 – Equipamentos construído com placas retangulares em ambientes agressivos. As placas retangulares de dimensões a e b trabalham sob flexão e a capacidade estrutural do equipamento é obtida usando expressões clássicas, disponíveis em qualquer livro sobre teoria de placas.

Vamos definir a capacidade estrutural do equipamento usando dois critérios:

- O afundamento (deflexão) das placas retangulares deve ser menor que duas vezes sua espessura. Por esse critério, a máxima pressão admissível para o equipamento deve ser

$$P \leq \frac{14 \times (E \times t^4)_{med}}{\alpha \times b^4}$$

- O alongamento de flexão nos pés das nervuras de maior dimensão (dimensão “ a ”) não deve exceder o valor admissível. Por esse critério, a pressão máxima aceitável deve ser

$$P \leq \frac{\epsilon \times (E \times (t + T)^2)_{med}}{\beta \times b^2}$$

Onde

P é a pressão máxima admitida no centro da placa retangular de dimensões a e b

E é o módulo medido no ensaio

t é a espessura da placa, medida no ensaio

T é a espessura do pé da nervura ao longo da dimensão $a > b$.

b é a dimensão menor da placa

$\epsilon = 0,001$ (ASME RTP1)

$\epsilon = 0,0025$ (Metade do umbral de infiltração)

α e β são parâmetros dependentes da relação a/b (V. tabela 2)

a/b	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
α	0,0138	0,0188	0,0226	0,0251	0,0267	0,0277	0,0284
β	0,3078	0,3834	0,4356	0,4680	0,4872	0,4974	0,5000

Tabela 2

Valores dos parâmetros α e β

4 – Equipamentos com placas retangulares em ambientes não agressivos. A capacidade estrutural desses equipamentos é obtida exatamente como no caso anterior

Para manter o afundamento (deflexão) menor que duas vezes a espessura da placa, temos

$$P \leq \frac{14 \times (E \times t^4)_{med}}{\alpha \times b^4}$$

Para o alongamento de flexão nos pés das nervuras não exceder o valor admissível, temos

$$P \leq \frac{\epsilon \times (E \times (t + T)^2)_{med}}{\beta \times b^2}$$

Onde

P é a pressão máxima admitida no centro da placa retangular de dimensões a e b

E é o módulo medido no ensaio

t é a espessura da placa, medida no ensaio

T é a espessura da nervura nas bordas das placas retangulares

b é a dimensão menor da placa

$\epsilon = 0,0035$ (AWWA C950)

$\epsilon = 0,0040$ (Metade do umbral de exudação)

α e β são parâmetros dependentes da relação a/b (V. tabela)

Exemplo numérico 2 – Vamos ilustrar o método computando a capacidade estrutural de um tanque horizontal feito com fibras picadas. O tanque é nervurado e dividido em painéis retangulares de dimensões

$$a = 127 \text{ cm}$$

$$b = 80 \text{ cm}$$

$$T = 0,8 \text{ cm (espessura das nervuras)}$$

$$t = 0,72 \text{ cm (espessura das placas retangulares)}$$

A pressão atuante no centro das placas é $0,25 \text{ kg/cm}^2$.

O ensaio de queima revelou os teores

$$(pic) = 0,35$$

$$(res) = 0,65$$

O módulo do laminado é

$$E = \frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \times [163\,000(pic) + 25\,000K]$$

$$K = (res) - \frac{7}{3}(pic) = (0,65) - \frac{7}{3} \times (0,35) = -0,17$$

A secura negativa indica que o fabricante optou por usar menos resina que a quantidade padrão.

$$E = \frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,65)} \times [163\,000(0,35) - 25\,000 \times 0,17] = 78\,073 \text{ kg/cm}^2$$

Os parâmetros α e β são extraídos da tabela 2 para $a/b = 127/80 = 1,6$

$$\alpha = 0,0251$$

$$\beta = 0,4680$$

Cenário 1. Capacidade do equipamento em ambientes agressivos

A pressão máxima admissível para manter o afundamento (deflexão) menor que duas vezes a espessura da placa deve ser

$$P \leq \frac{14 \times (E \times t^4)_{med}}{\alpha \times b^4}$$

$$P \leq \frac{14 \times (78\,073 \times 0,72^4)_{med}}{0,0251 \times 80^4} = 0,29 \text{ kg/cm}^2$$

Para manter a deflexão dos painéis abaixo de 14,4 mm, a pressão na placa não pode exceder 0,29 kg/cm². Como a pressão atuante é 0,25 kg/cm², o tanque tem capacidade estrutural suficiente para atender o critério de afundamento.

A pressão máxima admissível para o alongamento de flexão nos pés das nervuras não exceder o valor admissível deve ser

$$P \leq \frac{\epsilon \times (E \times (t + T)^2)_{med}}{\beta \times b^2}$$

$$P \leq \frac{0,001 \times (78\,073 \times (0,72 + 0,8)^2)_{med}}{0,4680 \times 80^2} = 0,06 \text{ kg/cm}^2$$

Para o alongamento de flexão não exceder 0,001, a pressão no centro da placa não pode ser maior que 0,06 kg/cm². Como a pressão atuante excede esse valor, é necessário aumentar a espessura T nos pés da nervura ao longo da dimensão $a = 127$ cm.

Para o tanque trabalhar com pressão $P = 0,25$ kg/cm², a espessura nos pés das nervuras de dimensão $a = 127$ cm deve ser aumentada para

$$\frac{0,001 \times 78\,073 \times (0,72 + 0,8 + T)^2}{0,4680 \times 80^2} = 0,25$$

De onde obtemos

$$T = 1,5 \text{ cm}$$

Cenário 2. Capacidade do tanque para ambientes não agressivos

Para manter o afundamento (deflexão) menor que duas vezes a espessura da placa, a máxima pressão deve ser

$$P \leq \frac{14 \times (E \times t^4)_{med}}{\alpha \times b^4}$$

$$P \leq \frac{14 \times (78\,073 \times 0,72^4)_{med}}{0,0251 \times 80^4} = 0,29 \text{ kg/cm}^2$$

Para manter a deflexão dos painéis abaixo de 14,4 mm, a pressão P não pode exceder 0,29 kg/cm². Essa é a mesma pressão calculada para o caso anterior.

Para o alongamento de flexão nos pés das nervuras não exceder o valor admissível, a máxima pressão deve ser

$$P \leq \frac{\epsilon \times (E \times (t + T)^2)_{med}}{\beta \times b^2}$$

$$P \leq \frac{0,0040 \times (78\,073 \times (0,72 + 0,8)^2)_{med}}{0,4680 \times 80^2} = 0,24 \text{ kg/cm}^2$$

Para o alongamento de flexão não exceder 0,004, a pressão P no centro da placa deve ser inferior a 0,24 kg/cm². Para ambientes não agressivos, não é necessário reforçar os pés das nervuras na direção a = 127 cm.

CAPÍTULO 1

Propriedades elásticas das lâminas

1 – Introdução. Quando observadas com microscópio, as lâminas de compósitos exibem duas fases bem nítidas e distintas. A fase descontínua é formada por fibras e a contínua por uma matriz de resina. Portanto, no nível microscópico, as lâminas são heterogêneas. Porém, devido ao pequeno diâmetro e a enorme quantidade de fibras, as lâminas podem ser consideradas homogêneas no nível macroscópico. Assim, apesar de microscopicamente heterogêneas, as lâminas são analisadas macroscopicamente como se fossem homogêneas. Essa simplificação nos permite atribuir propriedades físicas típicas de materiais homogêneos às lâminas intrinsecamente heterogêneas. Dessa maneira podemos definir propriedades como módulos, alongamentos, tensões, coeficientes de dilatação, densidades, etc, para as lâminas, como se elas fossem homogêneas.

As lâminas raramente são usadas isoladamente. Praticamente todas estruturas comerciais de compósitos são construídas combinando várias lâminas para formar laminados. Nossa tarefa neste capítulo é caracterizar as propriedades físicas, térmicas e elásticas das lâminas, que serão usadas no capítulo seguinte para compor laminados. Ao contrário das lâminas, os laminados não são homogêneos, sendo caracterizados por propriedades físicas e mecânicas médias. Assim, para lâminas podemos falar em módulos e tensões, mas para laminados temos que dizer módulos médios e tensões médias.

2 – Propriedades das fibras e das resinas. As lâminas comerciais são classificadas conforme o arranjo das fibras. As cinco lâminas usadas comercialmente são:

- *Lâminas de fibras picadas, com arranjo aleatório, identificadas como (pic).*
- *Lâminas de fibras contínuas, paralelas e unidirecionais, identificadas como (UD).*
- *Lâminas de fibras tecidas, identificadas como (tec).*
- *Lâminas de resina com areia, identificadas como (areia).*
- *Lâminas de resina pura, sem cargas ou fibras, identificadas como (res)*

Existem modelos matemáticos poderosos que estimam com precisão os módulos de lâminas partindo dos teores e arranjos das fibras. Esses modelos produzem estimativas precisas para os módulos, eliminando os caros e demorados ensaios de laboratório. Os modelos matemáticos tornam desnecessários os ensaios mecânicos para caracterizar

módulos de lâminas. As lâminas devem ser ensaiadas apenas para determinar seus alongamentos críticos – conhecidos com umbrais de falha – que serão discutidos mais adiante.

A tabela 1 mostra valores típicos para as propriedades de resinas e de fibras de vidro. As fibras comerciais têm composição fixa, de modo que suas propriedades são bem definidas e não dependem do fornecedor. O alongamento de ruptura das fibras não tem efeito no desempenho dos compósitos e por isso não é citado na tabela 1. Ao contrário das fibras, as resinas têm composição e propriedades variáveis. Porém, como os módulos das lâminas são dominados pelas fibras, podemos usar os valores médios típicos de uma resina padrão para representar todas as outras. Assim, os módulos das lâminas são computados supondo que todas resinas tenham as mesmas propriedades, aqui definidas como propriedades padrão. Essa simplificação facilita os cálculos sem introduzir erro significativo. A tabela 1 mostra os intervalos de variação para as propriedades das resinas e os valores padrão adotados neste livro.

<i>Propriedade</i>	<i>Fibras de vidro</i>	<i>Resinas</i>	<i>Resina padrão</i>
<i>Modulo de elasticidade (kg/cm²)</i>	720000	30000 a 40000	30000
<i>Relação de Poisson</i>	0,20	0,30	0,30
<i>Coefficiente de dilatação térmica (1/°C)</i>	6.10 ⁻⁶	(60 a 80).10 ⁻⁶	60.10 ⁻⁶
<i>Absorção de água (%)</i>	0	1,0 a 1,5	1,0
<i>Densidade (g/cm³)</i>	2,60	1,10 a 1,20	1,20
<i>Alongamento na ruptura (%)</i>	-----	1,0 a 5,0	-----

Tabela 1

Propriedades típicas de resinas e de fibras de vidro. O alongamento de ruptura das resinas pode variar entre 1,0% e 5,0%. Os módulos e os coeficientes de dilatação térmica derivados neste livro tomam como referência a resina padrão cujas propriedades são mostradas acima. O erro decorrente dessa simplificação é pequeno e pode ser ignorado.

3 – Densidade e espessura de lâminas. Antes de descrever as lâminas comerciais, vamos discutir algumas relações gerais aplicáveis a elas.

A densidade de qualquer lâmina é calculada pelas expressões

$$d = \frac{1}{\frac{(\text{vidro})}{2,6} + \frac{(\text{res})}{1,2}} \quad (1)$$

$$d = \frac{3,12}{1,2 + 1,4(\text{res})} \quad (1A)$$

Onde

d é a densidade da lâmina (g/cm^3)
(*vidro*) é o teor de vidro por peso
(*res*) é o teor de resina por peso
2,6 é a densidade do vidro (g/cm^3)
1,2 é a densidade padrão da resina (g/cm^3)

O peso de qualquer lâmina pode ser calculado conhecendo sua área, densidade e espessura

$$\text{Peso} = (\text{area}) \cdot (\text{densidade}) \cdot (\text{espessura}) \quad (2)$$

Na equação acima o peso é obtido em kg, quando a área é expressa em m^2 , a densidade em g/cm^3 e a espessura em mm.

Invertendo a equação (2), obtemos a espessura das lâminas em função do peso e da densidade

$$\text{espessura} = \frac{\text{peso}}{(\text{area}) \times (\text{densidade})} \quad (3)$$

O módulo de elasticidade da lâmina, é computado a partir do teor volumétrico de fibras de vidro nela. Esse teor pode ser calculado a partir dos teores por peso e das densidades do vidro e da resina

$$V_{\text{vol}} = \frac{\frac{(\text{vidro})}{2,6}}{\frac{(\text{vidro})}{2,6} + \frac{(\text{res})}{1,2}} \quad (4)$$

Entrando a identidade $(\text{vidro}) = 1 - (\text{res})$ na equação acima, obtemos

$$V_{\text{vol}} = \frac{1,2 \times (\text{vidro})}{2,6 - 1,4 \times (\text{vidro})} \quad (4A)$$

O teor volumétrico de fibras é usado para computar os módulos das lâminas.

Exemplo 1. Calcular a densidade e o teor volumétrico de vidro de uma lâmina UD com 70% de vidro por peso.

Lembrando que $(\text{res}) + (\text{vidro}) = 1$, temos que $(\text{res}) = 1 - (0,70) = 0,30$. Os cálculos são feitos de maneira direta, simplesmente substituindo os valores conhecidos nas equações acima.

$$d = \frac{3,12}{1,2 + 1,4(\text{res})}$$

$$d = \frac{3,12}{1,2 + 1,4 \times (0,30)} = 1,93 \text{ g / cm}^3$$

$$V_{vol} = \frac{1,2 \times (\text{vidro})}{2,6 - 1,4 \times (\text{vidro})}$$

$$V_{vol} = \frac{1,2 \times (0,70)}{2,6 - 1,4 \times (0,70)} = 0,52$$

Essa densidade da lâmina e esse teor volumétrico de vidro serão usados mais adiante para estimar as propriedades das lâminas UD.

4 - As lâminas padrão. A figura 1 mostra uma lâmina UD e seu sistema de referência local, definido pelos eixos 1, 2, e 3. O leitor deve notar que, no sistema de referência local, a direção das fibras UD coincide com o eixo 1. O eixo 2, naturalmente, é perpendicular às fibras. Nas aplicações industriais as lâminas são submetidas a tensões apenas no plano definido pelos eixos 1 e 2 – estado plano de tensões – e suas propriedades na direção 3 são irrelevantes. Este livro trata apenas das propriedades no plano 1 – 2 das lâminas. Por exemplo, os módulos E_1 , E_2 e G_{12} , valem apenas no plano das lâminas, definido pelas direções principais 1 e 2. Da mesma maneira, as resistências e os alongamentos críticos discutidos nas páginas que seguem, valem apenas nesse plano. Repetimos que, na maioria das aplicações, as lâminas são submetidas a tensões planas e suas propriedades na direção 3 são irrelevantes.

As quantidades de fibras e de resina nas lâminas comerciais dependem do controle exercido no processo de manufatura e da vontade do fabricante. Alguns fabricantes preferem economizar resina e trabalham com altos teores de fibras. Outros, ao contrário, preferem usar baixos teores de fibras para ganhar produtividade. Outros simplesmente não controlam seus processos e produzem aquilo que seus equipamentos e operários podem produzir. A grande variação nos teores de fibras e de resina impossibilita a generalização das propriedades mecânicas das lâminas comerciais. Por isso introduzimos o conceito de lâmina padrão.

As lâminas padrão têm teores e arranjos bem definidos de fibras. Suas propriedades são conhecidas com grande precisão. As lâminas padrão são usadas para computar todas as propriedades de qualquer laminado, real ou virtual. O uso das lâminas padrão permite ao projetista fazer o cálculo de equipamentos virtuais, não-existentes, sem conhecer os teores reais de resina e de fibras. Esse conhecimento é de extrema importância, visto que os teores reais não podem ser conhecidos “a priori”, antes da construção do equipamento.

Os equipamentos industriais raramente são feitos adicionando cargas na resina. A exceção fica por conta dos tubos que trabalham enterrados, que são feitos com um núcleo de resina e areia, para melhor resistir ao peso do solo. Para os propósitos deste livro vamos supor que a areia seja a única carga usada nos laminados de compósitos – em tubos enterrados. Considerando a lâmina feita com areia, as cinco lâminas padrão usadas comercialmente são:

- *Lâmina (pic)* com 30% de fibras picadas.
- *Lâmina (tec)* com 600 g/m² ou 800 g/m² de fibras tecidas.
- *Lâmina (UD)* com 70% de fibras contínuas unidirecionais
- *Lâmina (areia)* com 80% de areia.
- *Lâmina (res)* de resina pura.

Como o leitor pode ver, são apenas cinco as lâminas usadas comercialmente. Todos laminados comerciais são feitos combinando essas cinco lâminas.

Dissemos que as lâminas são homogêneas e têm as mesmas propriedades em qualquer ponto. Porém, essas propriedades podem variar com a direção. As lâminas feitas com fibras picadas ou com areia são isotrópicas, porque têm propriedades iguais em qualquer direção. As feitas com fibras tecidas ou unidirecionais (UD) têm propriedades diferentes em direções distintas. Portanto, as lâminas podem ser isotrópicas ou não, dependendo do arranjo das fibras.

As lâminas de fibras tecidas e de fibras UD têm dois planos ortogonais de simetria. A interseção desses planos com a superfície média dessas lâminas define dois eixos, também ortogonais, chamados de eixos principais. Neste livro, as direções principais das lâminas de tecidos e de fibras UD são identificadas pelos eixos 1 e 2, como mostra a figura 1.

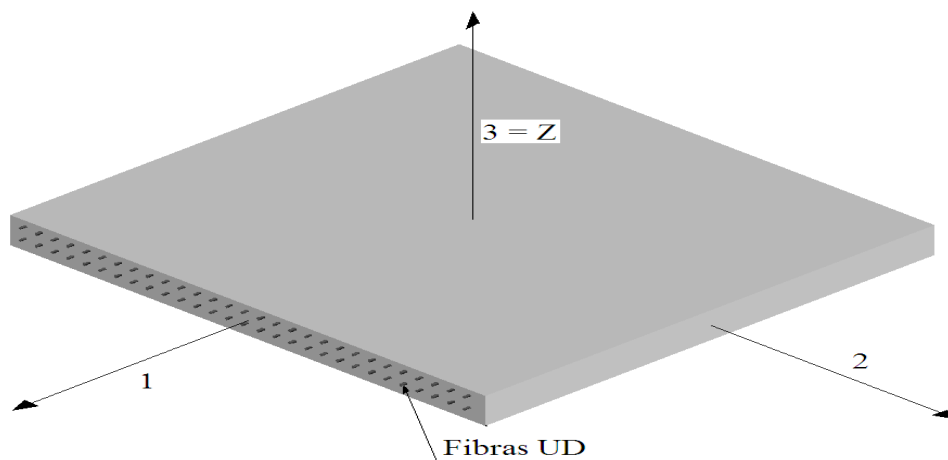


Figura 1

Mostra as direções principais 1, 2 e 3 de lâminas UD. As propriedades na direção 3 são irrelevantes. A direção 1 coincide com a direção das fibras. A direção 2 é perpendicular às fibras.

O eixo 1 das lâminas UD coincide com a direção das fibras e o eixo 2 é perpendicular a elas. Para as lâminas de fibras tecidas as direções 1 e 2 ficam respectivamente ao longo do urdume (comprimento do rolo) e da trama (largura do rolo). As lâminas de areia e de fibras picadas são isotrópicas e para elas não existem direções preferenciais, isto é, qualquer direção pode ser considerada principal. Veremos no capítulo seguinte como calcular os

módulos de lâminas UD em duas direções ortogonais quaisquer “x” e “y” a partir de suas propriedades nas direções principais 1 e 2.

O restante deste capítulo mostra como determinar os módulos das cinco lâminas padrão nas direções principais 1 e 2. Os laminados feitos com essas lâminas serão estudados no capítulo seguinte.

Exemplo 2. Explique a diferença entre isotropia, ortotropia, anisotropia e quase-isotropia.

O termo isotropia é aplicável a lâminas e laminados com módulos e resistências iguais em qualquer direção. A anisotropia designa laminados nos quais os módulos e as resistências variam com as direções. O termo ortotropia é aplicável a lâminas e laminados com dois planos de simetria para os quais é possível definir duas direções principais 1 e 2. Os laminados quase-isotrópicos têm os módulos (mas não as resistências) iguais em todas as direções. As lâminas são sempre isotrópicas ou ortotrópicas. Os laminados podem ser ortotrópicos, anisotrópicos ou quase-isotrópicos.

4.1 - Lâmina padrão de fibras picadas. O teor de fibras de vidro adotado neste livro para as lâminas padrão de fibras picadas é 30%. Portanto, para as lâminas padrão de fibras picadas, os teores de fibras e de resina são (vidro) = (pic) = 0,30 e (res) = 1,00 – 0,30 = 0,70. Essas lâminas podem ter várias espessuras, dependendo da vontade do projetista. O exemplo que segue calcula as propriedades de uma lâmina padrão feita com 450 g/m² de fibras picadas.

Exemplo 3. Calcular a densidade, a espessura, o peso por m², a quantidade de resina e o teor volumétrico de fibras de vidro para lâminas padrão M450. As lâminas de mantas com 450 g/m² são representadas neste livro como M450.

Começando pela densidade

$$d = \frac{1}{\frac{(pic)}{2,60} + \frac{(res)}{1,20}}$$

Como estamos tratando de lâmina padrão, (pic) = 0,30 e (res) = 0,70.

$$d = \frac{1}{\frac{0,30}{2,60} + \frac{0,70}{1,20}} = 1,43 \text{ g} / \text{cm}^3$$

A equação (1A) produz o mesmo resultado

$$d = \frac{3,12}{1,2 + 1,4(res)} = \frac{3,12}{1,2 + 1,4 \times (0,70)} = 1,43 \text{ g} / \text{cm}^3$$

Como a manta M450 tem 0,45 kg/m² de vidro e o teor padrão de vidro por peso é (pic) = 0,30, o peso da lâmina padrão M450 é

$$Peso = \frac{0,45}{0,3} = 1,5 \text{ kg/m}^2$$

A quantidade de resina é obtida de maneira direta, considerando o teor padrão de resina (res) = 0,70

$$Q_{res} = 1,5 \times 0,7 = 1,05 \text{ kg/m}^2$$

A espessura da lâmina padrão M450 é obtida por aplicação direta da fórmula mostrada antes

$$espessura = \frac{1,5}{1,43} = 1,05 \text{ mm}$$

O teor volumétrico padrão de fibras de vidro picadas é

$$V_{vol} = \frac{\frac{0,30}{2,60}}{\frac{0,30}{2,60} + \frac{0,70}{1,20}} = 0,17$$

O mesmo resultado é obtido usando a equação (4A)

$$V_{vol} = \frac{1,2 \times (\text{vidro})}{2,6 - 1,4 \times (\text{vidro})} = \frac{1,2 \times 0,30}{2,6 - 1,4 \times 0,30} = 0,17$$

As propriedades das lâminas padrão de fibras picadas nas direções 1 e 2 podem ser estimadas partindo do teor volumétrico de vidro. Os detalhes de cálculo são mostrados no apêndice e os resultados são apresentados na tabela 2.

Propriedades das lâminas padrão M450		
Módulo de elasticidade (kg/cm ²)	$E_1 = 70\ 000$	$E_2 = 70\ 000$
Relações de Poisson	$\nu_{12} = 0,30$	$\nu_{21} = 0,30$
Módulo de cisalhamento (kg/cm ²)	$G_{12} = 27\ 000$	$G_{21} = 27\ 000$
Coef. dilatação térmica (1/°C)	$\alpha_1 = 25,0 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_2 = 25,0 \cdot 10^{-6}$
Coef. de dilatação hídrica (1/g)	$\beta_1 = 0,19$	$\beta_2 = 0,19$
Espessura (mm)	1,05	

Tabela 2

As lâminas de fibras picadas são isotrópicas e têm as mesmas propriedades em todas as direções. Com exceção da espessura, as propriedades acima valem para qualquer lâmina padrão de fibras picadas

As lâminas de fibras picadas feitas na prática têm teores de vidro e propriedades diferentes do padrão mostrado na tabela 2. Isso é irrelevante, desde que a quantidade de fibras em kg/m^2 seja a mesma.

4.2 - Lâminas tecidas padrão. As lâminas padrão feitas com fibras tecidas T600 ou T800 têm espessura 0,85 mm. As propriedades dessas lâminas são deduzidas no apêndice e mostradas nas tabelas 3 e 4.

<i>Propriedades das lâminas padrão T600</i>		
Módulo de elasticidade (kg/cm^2)	$E_1 = 180\ 000$	$E_2 = 112\ 000$
Relações de Poisson	$\nu_{12} = 0,30$	$\nu_{21} = 0,19$
Módulo de cisalhamento (kg/cm^2)	$G_{12} = 24\ 000$	$G_{21} = 24\ 000$
Coef. de dilatação térmica ($1/^\circ\text{C}$)	$\alpha_1 = 14,8 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_2 = 26,8 \cdot 10^{-6}$
Coef. de dilatação hídrica ($1/\text{g}$)	$\beta_1 = 0,08$	$\beta_2 = 0,13$
Espessura (mm)	0,85	

Tabela 3
Propriedades das lâminas padrão T600

<i>Propriedades das lâminas padrão T800</i>		
Módulo de elasticidade (kg/cm^2)	$E_1 = 190\ 000$	$E_2 = 170\ 000$
Relações de Poisson	$\nu_{12} = 0,30$	$\nu_{21} = 0,27$
Módulo de cisalhamento (kg/cm^2)	$G_{12} = 27\ 500$	$G_{21} = 27\ 500$
Coef. de dilatação térmica ($1/^\circ\text{C}$)	$\alpha_1 = 16,2 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_2 = 18,7 \cdot 10^{-6}$
Coef. de dilatação hídrica ($1/\text{g}$)	$\beta_1 = 0,08$	$\beta_2 = 0,09$
Espessura (mm)	0,85	

Tabela 4
Propriedades das lâminas padrão T800

4.3 - Lâminas UD padrão. As lâminas de fibras unidirecionais podem ser feitas com diversas espessuras e com teores de vidro que variam entre 60% e 80%. Este livro adota o teor de vidro padrão (UD) = 0,70. As lâminas UD são ortotrópicas e podem ser aplicadas com as fibras orientadas em qualquer direção dos laminados. Veremos no capítulo seguinte que os laminados cilíndricos são feitos com as fibras UD orientadas fazendo ângulos $\theta = \pm 55^\circ$, $\theta = \pm 70^\circ$ e $\theta = 90^\circ$ com o eixo longitudinal do cilindro. Veremos também que os

laminados comerciais são balanceados, isto é, para cada lâmina UD orientada com ângulo $+\theta$, existe outra de igual espessura, com ângulo $-\theta$.

A densidade das lâminas de fibras UD padrão, com teor de vidro (UD) = 0,70, é

$$d = \frac{1}{\frac{(UD)}{2,60} + \frac{(res)}{1,20}}$$

$$d = \frac{1}{\frac{0,70}{2,60} + \frac{0,30}{1,20}} = 1,93 \text{ g/cm}^3$$

O teor de fibras de vidro por volume para a lâmina UD padrão é

$$V_{vol} = \frac{0,70/2,60}{0,70/2,60 + 0,30/1,20} = 0,52$$

Os módulos de elasticidade das lâminas UD padrão nas direções principais 1 e 2 são calculados a partir do teor volumétrico de vidro e das propriedades das fibras e da resina. Os valores padrão são mostrados na tabela 5, sem detalhar os cálculos. Os detalhes são mostrados no apêndice deste capítulo.

<i>Propriedades das lâminas UD padrão</i>		
<i>Módulo de elasticidade (kg/cm²)</i>	$E_1 = 400\ 000$	$E_2 = 100\ 000$
<i>Relações de Poisson</i>	$\nu_{12} = 0,30$	$\nu_{21} = 0,08$
<i>Módulo de cisalhamento (kg/cm²)</i>	$G_{12} = 35\ 000$	$G_{21} = 35\ 000$
<i>Coef. de dilatação térmica (1/°C)</i>	$\alpha_1 = 7,5 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_2 = 45,0 \cdot 10^{-6}$
<i>Coef. de dilatação hídrica (1/g)</i>	$\beta_1 = 0,04$	$\beta_2 = 0,18$
<i>Espessura</i>	<i>Varia</i>	

Tabela 5
Propriedades da lâmina UD padrão

4.4 - Lâminas de areia padrão. As lâminas de areia são usadas apenas no núcleo de tubos enterrados, para aumentar a rigidez de anel sem agregar custos excessivos. A densidade da areia é 2,60, a mesma das fibras de vidro. O teor de areia padrão adotado neste livro é (areia) = 0,80.

A densidade da lâmina padrão de areia é

$$d = \frac{1}{\frac{(areia)}{2,60} + \frac{(res)}{1,20}}$$

$$d = \frac{1}{\frac{0,80}{2,60} + \frac{0,30}{1,20}} = 2,11 \text{ g/cm}^3$$

A tabela 6 mostra as propriedades das lâminas padrão com 80% de areia.

<i>Propriedades das lâminas padrão de areia</i>		
<i>Módulo de elasticidade (kg/cm²)</i>	$E_1 = 60\ 000$	$E_2 = 60\ 000$
<i>Relações de Poisson</i>	$\nu_{12} = 0,30$	$\nu_{21} = 0,30$
<i>Módulo de cisalhamento (kg/cm²)</i>	$G_{12} = 23\ 000$	$G_{12} = 23\ 000$
<i>Coef. de dilatação térmica (1/°C)</i>	$\alpha_1 = 13,0 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_2 = 13,0 \cdot 10^{-6}$
<i>Coef. de dilatação hídrica (1/g)</i>	$\beta_1 = 0,15$	$\beta_2 = 0,15$
<i>Espessura</i>	<i>Varia</i>	

Tabela 6
Propriedades da lâmina de areia.

A tabela 7 mostra as propriedades das cinco lâminas padrão. Os laminados comerciais são feitos combinando essas lâminas

	<i>Tipo de lâmina</i>					
	<i>M450</i>	<i>Fibras tecidas</i>		<i>UD</i>	<i>Areia</i>	<i>Resina</i>
		<i>T600</i>	<i>T800</i>			
<i>Teor de vidro (peso)</i>	0,30	0,45	0,54	0,70	0,80	-----
<i>Teor de vidro (volume)</i>	0,17	0,27	0,35	0,52	0,70	-----
<i>Espessura (mm)</i>	1,05	0,85	0,85	<i>varia</i>	<i>varia</i>	<i>varia</i>
<i>Densidade (g/cm³)</i>	1,43	1,58	1,69	1,93	2,11	1,20
E_1 (kg/cm ²)	70000	180000	190000	400000	60000	30000
E_2 (kg/cm ²)	70000	112000	170000	100000	60000	30000
ν_{12}	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
ν_{21}	0,30	0,19	0,27	0,08	0,30	0,30

G_{12} (kg/cm ²)	27000	24000	27500	35000	23000	11500
α_1 (1/°C)	$25 \cdot 10^{-6}$	$14,8 \cdot 10^{-6}$	$16,2 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-6}$	$60 \cdot 10^{-6}$
α_2 (1/°C)	$25 \cdot 10^{-6}$	$26,8 \cdot 10^{-6}$	$18,7 \cdot 10^{-6}$	$45 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-6}$	$60 \cdot 10^{-6}$
β_1 (1/g)	0,19	0,08	0,08	0,04	0,15	0,40
β_2 (1/g)	0,19	0,13	0,09	0,18	0,15	0,40

Tabela 7

Propriedades das lâminas padrão. Essas propriedades são usadas para caracterizar laminados.

A resposta estrutural dos laminados depende dos módulos, dos coeficientes de dilatação térmica e da posição das lâminas em relação à superfície média. O capítulo seguinte mostra como computar os módulos e os coeficientes de dilatação térmica de qualquer laminado, virtual ou real.

5 – Resistências das lâminas. As resistências das lâminas são as tensões ou os alongamentos que produzem nelas densidades de trincas correspondentes a modos de falha reconhecidos. Os alongamentos críticos, que produzem as falhas, são os umbrais de falha. As lâminas possuem quatro desses umbrais, correspondentes aos quatro modos de falha estrutural reconhecidos. São eles:

Umbral de ruptura. O umbral de ruptura é o alongamento, ou a densidade de trincas, que inicia a ruptura da lâmina. Esse umbral é tradicionalmente reconhecido na literatura como alongamento de ruptura. O umbral de ruptura tem pouca utilidade, porque os equipamentos não devem ser projetados com base na falha por ruptura

Umbral de rigidez. O umbral de rigidez é o alongamento, ou a densidade de trincas, que inicia a perda de rigidez da lâmina. O umbral de rigidez é usado para dimensionar equipamentos submetidos a cargas cíclicas, como pás eólicas e peças estruturais para uso aeronáutico ou automotivo.

Umbral de exudação. O umbral de exudação é o alongamento, ou a densidade de trincas, que inicia vazamento de líquidos através da lâmina. O umbral de exudação é usado para dimensionar tubos que transportam líquidos de baixa agressividade, como água ou esgoto urbano.

Umbral de infiltração. O umbral de infiltração é alongamento, ou a densidade de trincas, que inicia a infiltração de produtos químicos na lâmina. O umbral de infiltração é usado para dimensionar tanques e tubos que trabalham em contato com produtos agressivos.

Os umbrais são propriedades de lâminas, exatamente como os módulos, a densidade e os coeficientes de dilatação térmica. Porém, ao contrário dos coeficientes de dilatação térmica e dos módulos, os umbrais dependem da tenacidade das resinas. A descrição detalhada dos umbrais de falha, incluindo o efeito da resina, está no livro “Durability of Industrial

Composites”, segunda edição. Os valores constantes nas tabelas 8 e 9 foram extraídos desse livro.

<i>Umbrais de falha para lâminas de fibras picadas</i>					
<i>Modo de falha</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Resina bisfenólica</i>	<i>Resina poliéster</i>	<i>Derakane 411</i>	<i>Derakane 470</i>
<i>Infiltração</i>	<i>Ti</i>	0,20 %	0,40%	0,50 %	0,35 %
<i>Exudação</i>	<i>Tw</i>	----	0,80 %	1,10 %	0,80 %
<i>Rigidez</i>	<i>Ts</i>	----	----	----	----
<i>Ruptura</i>	<i>Tr</i>	1,50 %	1,50 %	2,50 %	1,50%

Tabela 8

Os umbrais de rigidez não se aplicam às lâminas de fibras picadas.

<i>Umbrais de falha para lâminas de fibras UD na direção perpendicular às fibras</i>					
<i>Modo de falha</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Resina bisfenólica</i>	<i>Resina poliéster</i>	<i>Derakane 411</i>	<i>Derakane 470</i>
<i>Infiltração</i>	<i>Ti</i>	0,20 %	0,40%	0,50 %	0,35 %
<i>Exudação</i>	<i>Tw</i>	----	0,45 %	0,55%	0,45 %
<i>Rigidez</i>	<i>Ts</i>	----	0,70%	1,00%	----
<i>Ruptura</i>	<i>Tr</i>	1,50 %	0,70%	1,00 %	0,60%

Tabela 9

As resinas poliéster bisfenólicas e a Derakane 470 são evitadas em estruturas sujeitas a falha por rigidez.

Apêndice

Módulos das lâminas padrão.

Os módulos das lâminas padrão podem ser computados a partir das propriedades das fibras e da resina. Os cálculos são feitos usando fórmulas de micromecânica que levam em conta o arranjo e o teor volumétrico das fibras.

Lâminas de fibras picadas: O teor volumétrico de vidro nas lâminas padrão de fibras picadas é $V_{vol} = 0,17$. Os módulos das fibras e da resina estão listados na tabela 1. O módulo de tração da lâmina padrão é

$$E = \frac{3}{8} \times V_v \times E_v + (1 - V_v) \times E_r$$

$$E_1 = E_2 = \frac{3}{8} \times 0,17 \times 720000 + (1 - 0,17) \times 30000 = 70.000 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

O módulo de cisalhamento padrão é

$$G_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$G_{12} = \frac{70000}{2(1 + 0,3)} = 27000 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

Os coeficientes de dilatação térmica das lâminas padrão de fibras picadas são

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 25,0 \times 10^{-6} / \text{C}$$

Lâminas UD: O teor volumétrico de vidro nas lâminas UD padrão é $V_{vol} = 0,52$. As propriedades das fibras e da resina estão na tabela 1. O módulo de tração na direção 1 das fibras é calculado pela regra das misturas

$$E_1 = V_v \times E_v + (1 - V_v) \times E_r$$

$$E_1 = 0,52 \times 720000 + (1 - 0,52) \times 30000 \cong 400.000 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

O módulo de tração na direção 2, transversal às fibras, é calculado pela equação de Tsai-Halpin com parâmetros $\eta = 0,88$ e $\xi = 2$.

$$E_2 = E_r \times \left(\frac{1 + \xi \times \eta \times V_v}{1 - \eta \times V_v} \right)$$

$$E_2 = 30000 \times \left(\frac{1 + 2 \times 0,88 \times 0,52}{1 - 0,88 \times 0,52} \right) \cong 100.000 \text{ kg/cm}^2$$

O módulo de cisalhamento das lâminas UD padrão também é calculado pela equação de Tsai-Halpin

$$G_{12} = G_r \times \left(\frac{1 + \xi \times \eta \times V_v}{1 - \eta \times V_v} \right)$$

$$G_{12} = 11500 \times \left(\frac{1 + 2 \times 0,88 \times 0,52}{1 - 0,88 \times 0,52} \right) \cong 35.000 \text{ kg/cm}^2$$

Lâminas de fibras tecidas: As lâminas de fibras tecidas são modeladas como laminados constituídos por duas lâminas UD ortogonais e uma lâmina de resina. As quantidades de fibras UD nas direções principais 1 e 2 e a espessura da lâmina de resina determinam os módulos e as demais propriedades das lâminas tecidas.

Vamos exemplificar os cálculos para lâminas T600. Os tecidos com 600 g/m² são construídos com 2 lâminas UD ortogonais, uma com 433 e outra com 175 gramas de fibras UD por metro quadrado, respectivamente nas direções 1 e 2. As espessuras padrão dessas lâminas UD são:

Lâmina UD na direção 1

$$t_{\text{padrão}} = \frac{0,433}{0,7 \times 1,93} = 0,32 \text{ mm}$$

Lâmina UD na direção 2

$$t_{\text{padrão}} = \frac{0,175}{0,7 \times 1,93} = 0,13 \text{ mm}$$

A espessura padrão da lâmina T600 arbitrada neste livro é $t_{\text{tec}} = 0,85$ mm. Para completar essa espessura, é necessário acrescentar às duas lâminas UD uma lâmina de resina com espessura

$$t_r = 0,85 - (0,32 + 0,13) = 0,40 \text{ mm}$$

Com a inclusão dessa lâmina de resina, os módulos das lâminas tecidas T600 são

$$E_1 = \frac{400000 \times 0,32 + 100000 \times 0,13 + 30000 \times 0,40}{0,85} = 180\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_2 = \frac{400000 \times 0,13 + 100000 \times 0,32 + 30000 \times 0,40}{0,85} = 112\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{12} = \frac{35000 \times 0,45 + 11500 \times (0,85 - 0,45)}{0,85} = 24\,000 \text{ kg/cm}^2$$

Para os tecidos T800, que têm 433 e 347 gramas de fibras UD por metro quadrado respectivamente nas direções 1 e 2, as espessuras padrão das lâminas UD são:

Na direção 1

$$t_{\text{padrão}} = \frac{0,433}{0,7 \times 1,93} = 0,32 \text{ mm}$$

Na direção 2

$$t_{\text{padrão}} = \frac{0,347}{0,7 \times 1,93} = 0,26 \text{ mm}$$

Para completar a espessura padrão 0,85 mm, é necessário acrescentar às duas lâminas UD uma lâmina de resina com espessura $0,85 - (0,32 + 0,26) = 0,27$ mm. Com essa inclusão, os módulos das lâminas padrão de tecido T800 são

$$E_1 = \frac{400000 \times 0,32 + 100000 \times 0,26 + 30000 \times 0,27}{0,85} = 190\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_2 = \frac{400000 \times 0,26 + 100000 \times 0,32 + 30000 \times 0,27}{0,85} = 170\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{12} = \frac{35000 \times 0,58 + 11500 \times (0,85 - 0,58)}{0,85} = 27\,500 \text{ kg/cm}^2$$

As lâminas T600 e T800 têm a mesma espessura padrão 0,85 mm. Os módulos de elasticidade padrão são os aqui deduzidos. Essas grandezas são usadas em todos exemplos numéricos deste livro.

Os módulos das lâminas padrão podem também ser medidos pelos tradicionais ensaios em laboratório.

Capítulo 2

Propriedades elásticas de laminados

Lei das misturas

1 – Introdução. Vimos no capítulo anterior que os laminados comerciais são construídos combinando cinco tipos de lâminas, classificadas conforme o arranjo das fibras. O presente capítulo mostra como computar as propriedades de laminados a partir das propriedades dessas lâminas. As propriedades das lâminas variam com o teor de fibras e isso é um grande complicador. Porém, essa dificuldade pode ser eliminada usando laminas padrão de composições fixas e propriedades conhecidas. Os cálculos estruturais são feitos para laminados padrão, construídos com lâminas padrão.

A lei das misturas será usada para computar os módulos, as relações de Poisson e todos coeficientes de dilatação de qualquer laminado feito com lâminas padrão. Existem duas versões para a lei das misturas:

- *Lei das misturas unidimensional, que ignora as interações entre as lâminas. Essa versão é simples de usar, mas dá resultados ligeiramente inferiores aos reais.*
- *Lei das misturas matricial, que faz uso das interações entre as lâminas. Essa versão é um pouco mais complicada que a unidimensional, mas dá resultados exatos.*

Este capítulo trata apenas do modelo simples, unidimensional. O modelo matricial exato, que leva em conta a interação das lâminas, é discutido no capítulo 5.

A lei das misturas computa as propriedades de laminados a partir das propriedades das lâminas discutidas no capítulo anterior. O estudo inicia com a computação dos módulos. As relações de Poisson e os coeficientes de dilatação são discutidas na sequência.

2 – Laminados cilíndricos. A análise de laminados cilíndricos é feita no sistema de referência global, definido pelos eixos ortogonais de simetria $x - y$ da estrutura. Para estruturas cilíndricas, a direção longitudinal (axial) é identificada como “eixo x ” e a circunferencial como “eixo y ”. As propriedades do laminado são computadas girando as propriedades das lâminas de seus respectivos sistemas locais 1 – 2 para o sistema global $x - y$. A figura 1 mostra o ângulo $+\theta$, formado pela direção 1 de lâmina UD com a direção axial “ x ” da estrutura. O ângulo que define a orientação das fibras UD é positivo quando medido na direção anti-horária. A figura mostra o sistema global $x - y$ da estrutura e o sistema local 1 – 2 da lâmina UD.

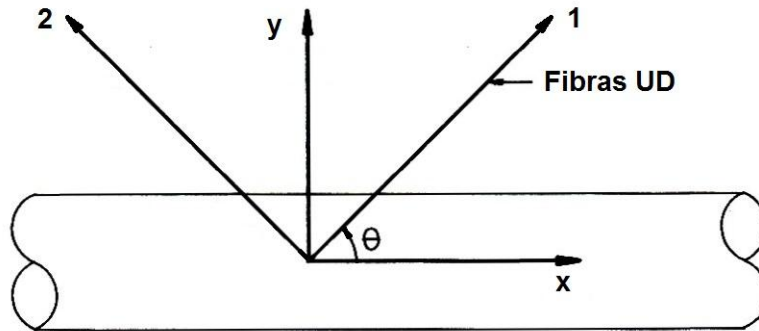


Figura 1

As propriedades das lâminas discutidas no capítulo 1 valem para o sistema de referência local 1 – 2. As propriedades dos laminados são expressas no sistema global $x-y$. As lâminas podem ser orientadas de maneira arbitrária nos laminados, de modo que seu eixo local 1 pode fazer qualquer ângulo “ θ ” com o eixo global “ x ”. No caso específico de estruturas cilíndricas, o ângulo “ θ ” é sempre medido no sentido anti-horário entre a direção “ x ” (axial) do laminado e a direção 1 das fibras.

Os esquemas de laminação devem explicitar de maneira clara as posições e as orientações das lâminas nos laminados. A convenção universalmente usada estabelece que os ângulos de orientação das lâminas sejam medidos no sentido anti-horário, entre eixo global x e o eixo local 1. Por exemplo, um laminado cilíndrico formado por duas lâminas M450 e cinco lâminas UD, orientadas com ângulos 0, 30, – 45, – 60 e 90 em relação ao eixo longitudinal x , é representado como:

M/M/0/30/-45/-60/90

Nas estruturas cilíndricas, o ângulo θ é sempre formado pelo eixo global x e o eixo local 1. O ângulo “ θ ” é considerado positivo no sentido anti-horário, como mostra a figura 1.

Os laminados são simétricos se, para cada lâmina distando $+z$ da superfície média, existe outra igual na posição $-z$. Esses esquemas têm as lâminas dispostas de maneira simétrica em relação à superfície média do laminado. Os laminados são balanceados se, para cada lâmina com ângulo $+\theta$, outra igual com ângulo $-\theta$. A posição das lâminas “balanceadas” é irrelevante. Para simplificar a análise, os projetistas geralmente criam estruturas com laminados simétricos e balanceados.

Os laminados simétricos não são necessariamente balanceados e os balanceados não são necessariamente simétricos. Porém, é possível fazer laminados ao mesmo tempo simétricos e balanceados. Por exemplo: O laminado $+30/-30/+30/-30$ é balanceado, porque tem duas lâminas com ângulo $+30$ e duas com ângulo -30 ; porém, ele não é simétrico, porque as lâminas de mesmo ângulo não estão simetricamente dispostas em relação à superfície média. Por outro lado, o laminado representado pelo esquema $+30/-30/-30/+30$ é balanceado e simétrico. O esquema M/M/+70/-70/+70 não é balanceado nem simétrico. O laminado M/M/+70/-70/+70/-70 é balanceado, mas não é simétrico. E assim por diante. Os conceitos de simetria e de balanceamento são fáceis de entender.

Os equipamentos de compósito usados em ambientes agressivos geralmente têm barreiras de corrosão internas de fibras picadas e laminados estruturais de fibras UD. Os laminados feitos com fibras UD e barreira de corrosão não são simétricos. Mas, eles podem e devem ser balanceados. A simetria é importante em laminados submetidos a cargas de flexão, sendo irrelevante em equipamentos cilíndricos que trabalham sob pressão interna. Mas, o balanceamento é necessário em todas as aplicações. Podemos dizer que todos laminados comerciais são balanceados, isto é, para cada lâmina UD com ângulo $+\theta$ sempre existe outra igual com ângulo $-\theta$.

Exemplo 1. O projetista determina que um tubo de compósito deva ser feito enrolando 4 lâminas UD com ângulo $+ 55$ graus e 3 lâminas UD com ângulo $- 55$ graus. Explique porque esse esquema de laminação não é adequado.

O esquema não é balanceado. Os tubos torcem quando pressurizados. O laminado deve ser feito balanceado, com o mesmo número de lâminas nas direções $+ 55$ e $- 55$.

3 - Os laminados comerciais. Os laminados comerciais são feitos combinando as cinco lâminas padrão descritas no capítulo anterior. Essa combinação é escolhida pelo projetista levando em conta o processo de laminação e as exigências da aplicação. A tabela 1 mostra a relação entre os processos e as lâminas. As cinco lâminas padrão podem ser combinadas de várias maneiras, possibilitando a criação de um número enorme de laminados diferentes, cada um com suas propriedades. A liberdade de criar diferentes esquemas de laminação torna impraticável o tabelamento das propriedades mecânicas de laminados. A solução para essa complicação é o uso de expressões matemáticas para computar essas propriedades em função dos tipos, das espessuras e dos arranjos das lâminas. A computação é feita com base na arquitetura do laminado e nas propriedades das lâminas padrão.

Este capítulo usa a lei das misturas unidimensional para computar as propriedades de laminados cilíndricos comerciais.

<i>Processo</i>	<i>Lâminas usadas</i>
<i>Laminação manual</i>	<i>Fibras picadas, fibras tecidas e resina</i>
<i>Laminação com pistola</i>	<i>Fibras picadas e resina</i>
<i>Laminação hoop – chop</i>	<i>Fibras picadas, fibras UD, areia e resina</i>
<i>Laminação por enrolamento</i>	<i>Fibras UD, areia e resina</i>

Tabela 1

Os laminados feitos com fibras picadas são isotrópicos e têm as mesmas propriedades em qualquer direção. Os feitos com fibras tecidas ou fibras UD têm propriedades que variam com a direção.

As propriedades das lâminas padrão referidas aos sistemas locais 1 – 2 são conhecidas e listadas na tabela 7 do capítulo anterior. Para calcular as contribuições dessas lâminas nos

laminados é necessário girar suas propriedades dos sistemas locais 1 – 2 para o sistema global $x - y$. As lâminas de resina, de fibras picadas e de areia são isotrópicas e suas propriedades não precisam ser giradas. Porém, as propriedades das lâminas de fibras UD são diferentes nas direções 1 e 2 e precisam ser giradas.

Os laminados comerciais são idealizados pelos projetistas para facilitar o processo de laminação e a análise estrutural. Por exemplo, as lâminas de tecidos são sempre posicionadas com as direções principais 1 e 2 alinhadas com as direções globais “y” e “x”. Da mesma maneira, nos laminados feitos pelo processo hoop-chop as lâminas UD são enroladas com ângulo $\theta = 90$ graus, isto é, com suas direções 1 e 2 alinhadas ao longo das direções globais y e x. As lâminas UD nessas condições têm suas direções principais 1 e 2 alinhadas com o sistema global $x - y$ e suas propriedades não precisam ser giradas.

Nos laminados cruzados, as lâminas UD são posicionadas com suas direções locais 1 fazendo ângulos $\pm \theta$ com a direção global “x”. Nessa situação suas propriedades precisam ser giradas do sistema local 1 – 2 para o sistema global $x - y$. Os laminados comerciais usam apenas quatro ângulos para as fibras UD.

- *Para vasos de pressão e tubos aéreos, as lâminas UD são enroladas com ângulo $\theta = \pm 55$ graus. Esses laminados são conhecidos como UD55.*
- *Para tubos enterrados e tanques verticais cilíndricos, as lâminas UD são enroladas com ângulo $\theta = \pm 70$ graus. Esses laminados são conhecidos como UD70.*
- *Para laminados “hoop-chop”, as lâminas UD são paralelas à direção y. Nessas laminados as lâminas UD são referidas como UD90.*
- *Para perfis pultrudados, as lâminas UD são orientadas na direção x, sendo por isso referidas como UD0.*

O uso de apenas quatro ângulos facilita a análise de laminados comerciais feitos com lâminas UD. As propriedades das lâminas UD giradas para as direções $x - y$ são conhecidas e tabeladas em todos esses casos.

4 - Sistemas locais e sistema global. Vamos fazer uma pausa para saber onde estamos. Temos cinco lâminas padrão que podem ser combinadas à vontade para produzir laminados comerciais. As lâminas de resina, de areia e de fibras picadas são isotrópicas e não têm direções preferenciais. Para elas todas as direções são equivalentes. As lâminas de tecidos são laminadas de modo que suas direções principais 1 – 2 coincidam com os eixos globais $y - x$. As lâminas UD podem ser posicionadas com suas direções principais 1 (direções das fibras) fazendo ângulos $\theta = \pm 55^0$, $\theta = \pm 70^0$, $\theta = 90^0$ ou $\theta = 0^0$ com o eixo longitudinal “x” da estrutura.

As propriedades das lâminas de resina, de areia e de fibras picadas não precisam ser giradas do sistema local 1 – 2 para o sistema global $x - y$. As únicas lâminas cujas propriedades precisam ser giradas são as UD0, UD90, UD55 e as UD70. Os módulos e os coeficientes de dilatação térmica dessas lâminas, depois de girados dos sistemas locais 1 – 2 para o sistema global $x - y$, são mostrados na tabela 2.

As fórmulas usadas para transformar as propriedades das lâminas UD do sistema local 1 – 2 para o sistema global x – y serão discutidas mais adiante, quando tratarmos da representação matricial das lâminas. Os valores seguintes são aplicáveis.

Propriedade	UD55	UD70	UD90 (Hoop-chop)	UD0 (Pultrusão)
E_x (kg/cm ²)	96 300	92 800	100 000	400 000
E_y (kg/cm ²)	170 800	298 200	400 000	100 000
ν_{xy} (----)	0,39	0,18	0,08	0,30
ν_{yx} (----)	0,70	0,59	0,30	0,08
G_{xy} (kg/cm ²)	101 200	66 000	35 000	35 000
α_x (1/°C)	$32,6 \cdot 10^{-6}$	$40,6 \cdot 10^{-6}$	$45,0 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$
α_y (1/°C)	$19,9 \cdot 10^{-6}$	$11,8 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$45,0 \cdot 10^{-6}$
α_{xy} (1/°C)	$\pm 32,5 \times 10^{-6}$	$\pm 24,0 \times 10^{-6}$	0	0
β_x	0,13	0,12	0,18	0,04
β_y	0,09	0,09	0,04	0,18
β_{xy}	$\pm 0,13$	$\pm 0,09$	0	0

Tabela 2

Mostra as propriedades no sistema global de lâminas UD enroladas com vários ângulos. O teor de vidro é o padrão, (UD) = 0,70.

A seguir mostramos como usar a lei das misturas unidimensional para calcular os módulos, as relações de Poisson e os coeficientes de dilatação de qualquer laminado.

Exemplo 2. Explicar a diferença entre os módulos de lâminas e os módulos de laminados.

Os módulos de lâminas são expressos como E_1 e E_2 nas direções principais 1 e 2 da lâmina. Cada lâmina tem seus módulos específicos.

Os laminados são feitos combinando lâminas de espessuras diferentes, módulos diferentes e que podem ser orientadas em qualquer direção. Para eles são definidos módulos médios, computados usando a regra das misturas. Os módulos médios de laminados são expressos como E_x e E_y respectivamente nas direções globais “x” e “y”.

5 – Laminados virtuais. Para projetar estruturas novas, não-existentes, o projetista precisa conhecer as propriedades de laminados ainda não construídos. Como os laminados não existem, não é possível medir suas propriedades. O projetista não conhece “a priori” as propriedades da estrutura que será produzida. E, sem conhecer as propriedades, ele não pode fazer previsões para o desempenho dela.

Para resolver essa dificuldade, o projetista usa as propriedades das lâminas padrão desenvolvidas no capítulo anterior. As lâminas padrão têm composições fixas e propriedades bem definidas. As propriedades dos laminados feitos com elas podem ser computadas com precisão usando a lei das misturas. Os laminados projetados dessa maneira, com lâminas padrão, são ficções matemáticas que não existem no mundo real. Esses laminados virtuais são idealizações arbitradas para permitir a execução de cálculos. Depois de construídos, os laminados reais podem ter suas propriedades medidas e comparadas com as dos virtuais. O erro é muito pequeno, justificando o uso dos laminados padrão.

Antes de mostrar como obter as propriedades de laminados virtuais, vamos alertar o leitor para uma simplificação inerente à lei das misturas unidimensional. A simplificação é a seguinte. É sabido que os módulos das lâminas embutidas em laminados são ligeiramente maiores que os módulos das mesmas lâminas isoladas. A explicação para isso é que em laminados as lâminas trabalham coladas umas nas outras, sendo forçadas a deformar de maneira uniforme, como uma estrutura única. Nessa condição o efeito Poisson entra em ação e incrementa os módulos das lâminas. A maneira correta de computar as propriedades de laminados é usando o protocolo matricial desenvolvido no capítulo 5. O protocolo matricial leva em conta o efeito Poisson e dá valores corretos para as propriedades. Este capítulo usa a lei das misturas unidimensionais, que supõe as lâminas trabalhando independentes umas das outras, sem acionar o efeito Poisson. Essa simplificação introduz um pequeno erro nos valores calculados. Os módulos obtidos dessa maneira são ligeiramente inferiores aos reais, mas a abordagem é simples de usar e dá resultados satisfatórios. Dito isso, passemos ao cálculo dos módulos de laminados virtuais usando a lei das misturas unidimensional.

5.1 – Módulos de tração e de cisalhamento de laminados virtuais. De acordo com a lei das misturas, os módulos e os coeficientes de dilatação de qualquer laminado – real ou virtual – podem ser obtidos somando as contribuições das lâminas no sistema global $x - y$. Para computar essas contribuições é preciso girar os módulos e os coeficientes de dilatação térmica dos sistemas locais 1 – 2 das lâminas para o sistema global $x - y$. Esse procedimento foi discutido na seção anterior. O projetista inicia o estudo de laminados virtuais conhecendo todas as propriedades de todas as lâminas, nas direções $x - y$.

Os módulos de laminados virtuais computados usando a regra das misturas unidimensional é

$$E = E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t}$$

Ou

$$E = \frac{E_{pic} \times t_{pic} + E_{tec} \times t_{tec} + E_{UD} \times t_{UD} + E_{areia} \times t_{areia} + E_r \times t_r}{t}$$

Onde E e t são respectivamente o módulo e a espessura do laminado. Os módulos e as espessuras das lâminas padrão são designados pelos subscritos correspondentes

pic lâmina de fibras picadas

tec lâmina de fibras tecidas
UD lâmina de fibras UD
areia lâmina feita com areia
r lâmina de resina

A espessura do laminado é obtida somando as espessuras das lâminas

$$t = t_{pic} + t_{tec} + t_{UD} + t_{areia} + t_r$$

Pela lei das misturas, o módulo de tração de laminados é a média ponderada dos módulos das lâminas, tomando como pesos as espessuras. Essa equação vale para qualquer laminado, real ou virtual. Porém, ela não pode ser usada para laminados reais, porque para eles as espessuras e os módulos das lâminas são desconhecidos.

Sendo assim, a equação acima é usada apenas para computar os módulos de laminados virtuais, feitos com lâminas padrão de módulos conhecidos e espessuras arbitradas pelo projetista. Repetindo, a equação mostrada é usada para computar as propriedades de laminados virtuais, que ainda não foram construídos. Ela pode ser chamada de “equação do projetista”.

É óbvio que os módulos dos laminados virtuais na direção global “x” devem ser computados usando as propriedades das lâminas na direção “x”. O mesmo vale para a direção “y” e para o módulo de cisalhamento. A equação (1) inclui os três módulos.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^x \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^y \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Repetimos que a equação (1) é usada para computar os módulos de equipamentos em fase de projeto. Os laminados virtuais são concebidos com lâminas padrão – de módulos conhecidos – e espessuras arbitradas pelo projetista. O projetista usa as espessuras arbitradas e os módulos conhecidos das lâminas padrão para computar as propriedades do laminado virtual, imaginário e inexistente. Essas propriedades são usadas para fazer a análise estrutural do equipamento virtual, em fase de projeto. Em geral a análise feita com as propriedades do primeiro laminado arbitrado não atende às exigências da aplicação e novas tentativas devem ser feitas. O processo é repetido até obter um laminado satisfatório. Projetistas experientes conseguem acertar o laminado com três tentativas. Na primeira tentativa ele erra para mais, na segunda ele erra para menos, e na terceira ele acerta. O equipamento virtual assim calculado pode, então, ser construído.

Dessa maneira obtemos a especificação de um laminado não-existente, que atende as exigências da aplicação. As espessuras das lâminas desse laminado virtual são escolhas do projetista. As propriedades das lâminas padrão são as especificadas no capítulo 1.

Os fabricantes não sabem ajustar seus processos em função das espessuras de lâminas. Eles sabem fazer ajustes para as quantidades de materiais que entram no processo, mas não para

as espessuras de lâminas. Por isso o projetista deve especificar as quantidades de cada material por metro quadrado de cada lâmina, necessárias para obter as espessuras desejadas. Com essas informações os fabricantes se esforçam para fazer o laminado especificado. Obviamente, ele nunca consegue acertar exatamente essas quantidades, produzindo laminados ligeiramente diferentes do especificado.

As quantidades de material por metro quadrado correspondentes às espessuras padrão especificadas para cada lâmina são

$$Q_{pic} = 0,30 \times 1,43 \times t_{pic} = 0,43 \times t_{pic}$$

Onde $1,43 \text{ g/cm}^3$ é a densidade da lâmina padrão feita com 30% de fibras picadas

$$Q_{UD} = 0,70 \times 1,93 \times t_{UD} = 1,35 \times t_{UD}$$

Onde $1,93 \text{ g/cm}^3$ é a densidade da lâmina padrão UD feita com 70% de fibras de vidro

$$Q_{areia} = 0,80 \times 2,11 \times t_{areia} = 1,69 \times t_{areia}$$

Onde $2,11 \text{ g/cm}^3$ é a densidade da lâmina padrão feita com 80% de areia.

$$Q_{res} = 1,43 \times t_{pic} \times 0,7 + 1,93 \times t_{UD} \times 0,3 + 2,11 \times t_{areia} \times 0,2 + 1,20 \times t_r$$

$$Q_{res} = t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r$$

As equações acima computam as quantidades de material correspondentes às espessuras arbitradas pelo projetista. Observe que a quantidade de resina depende das espessuras de todas lâminas. As lâminas de tecido e de mantas são fornecidas com pesos por metro quadrado bem definidos e não precisam de equações como essas.

Os teores de fibras, de areia e de resina do laminado virtual podem ser calculados a partir das quantidades de materiais arbitradas pelo projetista. Vamos mostrar como fazer isso.

O peso do laminado virtual por metro quadrado é

$$Q = Q_{pic} + Q_{UD} + Q_{areia} + Q_{res}$$

Os teores para o laminado virtual são, por definição

$$(pic) = \frac{Q_{pic}}{Q}$$

$$(UD) = \frac{Q_{UD}}{Q}$$

$$(areia) = \frac{Q_{areia}}{Q}$$

$$(res) = \frac{Q_{res}}{Q}$$

Vemos que é fácil determinar os teores e as quantidades de materiais correspondentes às espessuras arbitradas pelo projetista. Com essas informações, o fabricante ajusta seu processo para iniciar a produção.

5.2 – Corte de resina pelo fabricante. Geralmente os fabricantes fazem tudo que podem para “economizar” na fabricação dos equipamentos. A maneira mais fácil de fazer isso é reduzir a quantidade de resina especificada. Ele pode fazer isso sem problemas, desde que as quantidades de fibras e de areia sejam respeitadas. As razões que levam o fabricante a alterar a quantidade de resina proposta no projeto são

- *Redução de custo*
- *Ajuste no processo para acomodar resinas de viscosidades diferentes*
- *Umectação de areias com granulometrias diferentes*
- *Impregnação de fibras de fornecedores diferentes*

Sabemos que os módulos padrão valem para lâminas com 70% de fibras UD, 30% de fibras picadas e 80% de areia. Na prática esses teores nunca acontecem, seja por falta de precisão nos processos de produção, ou porque o fabricante altera deliberadamente a quantidade de resina. O que mais acontece é o fabricante cortar a resina, para reduzir custos. Raras vezes o fabricante aumenta a quantidade de resina. Como veremos em seguida, essa prática não invalida a utilidade dos laminados virtuais projetados usando o conceito de lâminas padrão.

A quantidade padrão de resina especificada pelo projetista é

$$Q_{res} = t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r$$

A relação Δ entre a quantidade R de resina “escolhida” pelo fabricante e a quantidade padrão é

$$\Delta = \frac{R}{Q_{res}}$$

$$\Delta = \frac{R}{t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r}$$

$$R = \Delta \times (t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r)$$

A equação acima computa a quantidade R de resina efetivamente usada pelo fabricante.

Exemplo 3 – *O projetista arbitra as espessuras abaixo para um laminado hoop-chop em fase de projeto.*

$$t_{pic} = 2,0 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = 3,0 \text{ mm}$$

$$t_{areia} = 8,0 \text{ mm}$$

$$t_r = 0,6 \text{ mm}$$

$$t = 2,0 + 3,0 + 8,0 + 0,6 = 13,6 \text{ mm}$$

O fabricante decide usar $\Delta = 80,0\%$ da resina especificada. Ele tem toda liberdade para fazer isso, desde que as quantidades de fibras e de areia sejam mantidas. Vamos computar a quantidade de resina realmente usada e o efeito dessa alteração na espessura do laminado.

$$R = \Delta \times (t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r)$$

$$R = 0,80 \times (2,0 + 0,58 \times 3,0 + 0,42 \times 8,0 + 1,20 \times 0,6)$$

$$R = 6,26 \text{ kg/m}^2$$

A quantidade de resina economizada é

$$\text{Resina economizada} = 0,20 \times (2,0 + 0,58 \times 3,0 + 0,42 \times 8,0 + 1,20 \times 0,6) = 1,56 \text{ kg/m}^2$$

Essa quantidade de resina economizada corresponde à espessura

$$t = \frac{1,56}{1,20} = 1,30 \text{ mm}$$

Portanto, o corte de 20% na quantidade de resina reduz a espessura do laminado de 13,6 mm para 12,3 mm.

Essa redução de espessura acontece na resina. O fabricante mantém inalteradas as quantidades de fibras e de areia especificadas pelo projetista. Porém, fica a pergunta:

Será que os laminados modificados pelos fabricantes têm propriedades consistentes com as dos laminados padrão?

Essa pergunta é respondida em seguida.

A equação (1) vale para qualquer laminado, real ou virtual. A influência de variações na quantidade de resina é determinada pelas variações das espessuras. Se a espessura for aumentada, o laminado tem excesso de resina. Se reduzida, tem escassez. Em outras palavras, os módulos de laminados com resina fora do padrão diferem dos valores padrão apenas na pequena contribuição decorrente da variação de espessura resultante do excesso ou da escassez de resina

$$E \times t = E_{padr\tilde{a}o} \times t_{padr\tilde{a}o} + E_r \times (t - t_{padr\tilde{a}o})$$

Essa expressão relaciona os módulos de laminados padrão com os de laminados construídos com quantidades de resina fora do padrão. Esses módulos são diferentes, como podemos ver. Na prática, porém, as diferenças entre as espessuras real e padrão são pequenas e a equação acima simplifica para

$$E \times t \cong E_{padr\tilde{a}o} \times t_{padr\tilde{a}o}$$

Do exposto, concluímos que a variação de espessura resultante de cortes ou incrementos na quantidade de resina é compensada pela variação de módulo. A análise feita usando laminados padrão vale para qualquer laminado, com qualquer quantidade de resina, desde que as quantidades de fibras e de areia sejam as mesmas.

Até aqui tratamos de laminados virtuais, não-existent, e ainda na fase de projeto. Vamos agora analisar os módulos de laminados reais, existentes.

6 – Laminados reais. Muitas vezes o inspetor deve avaliar a capacidade estrutural de equipamentos existentes. Nessas situações, a equação (1) não pode ser usada, porque as espessuras e os módulos das lâminas de laminados reais são desconhecidos. Nesses casos as propriedades do laminado são computadas a partir dos teores de vidro, de areia e de resina. Precisamos, portanto, modificar a equação (1) para calcular os módulos de laminados reais em função dos teores de fibras, de areia e de resina – fáceis de medir em laminados reais – em lugar das espessuras e dos módulos das lâminas individuais.

A equação (2) calcula os módulos de laminados reais, quando são conhecidos os teores de fibras de vidro, de areia e de resina. Nessa equação, a contribuição das lâminas de fibras tecidas foi ignorada, porque os tecidos nunca são usados em laminados comerciais feitos com fibras UD e areia.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20+1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 62900(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right] \text{ é a secura do laminado}$$

$$d = \left[\frac{3,12}{1,20+1,40(res)} \right] \text{ é a densidade do laminado}$$

Nas equações acima, (res), (pic), (UD) e (areia), são os teores desses materiais, medidos queimando corpos de prova.

A secura do laminado, K, indica excesso ou escassez de resina em relação à quantidade padrão. Se $K > 1$, o laminado tem mais resina que o padrão, isto é, tem excesso de resina. Se $K < 1$, o laminado é seco. A secura do laminado nada mais é que um indicador da quantidade de resina em relação ao padrão. O fabricante pode, e frequentemente o faz, optar por fazer laminados secos.

Exemplo 4. Explique a diferença entre as equações (1) e (2).

A equação (1) calcula os módulos de qualquer laminado usando as espessuras das lâminas e seus módulos. Essa equação é exata e vale sempre, para qualquer laminado. O problema com a equação (1) é que as espessuras e os módulos das lâminas embutidas em laminados reais são desconhecidos. Por isso ela é usada apenas para laminados virtuais, quando o projetista é livre para arbitrar as espessuras de lâminas padrão de módulos conhecidos.

A equação (2) calcula os módulos de laminados reais, usando os teores medidos de fibras, de areia e de resina. Esses teores são fáceis de medir queimando corpos de prova. A equação (2) é usada para computar os módulos de laminados reais.

O projetista sempre usa a equação (1) para dimensionar equipamentos em fase de projeto. O engenheiro de inspeção sempre usa a equação (2) para estimar os módulos de laminados reais. Essas duas equações são idênticas, mas escritas de maneira diferente. Elas são deduzidas uma da outra e produzem os mesmos valores para os módulos. A passagem da equação (1) para a equação (2) é mostrada no apêndice.

7 – Módulos de flexão. Os módulos de flexão de laminados são discutidos no apêndice 2 deste capítulo.

8 – Relações de Poisson. A lei das misturas unidimensional computa as relações de Poisson de laminados usando as mesmas fórmulas desenvolvidas para os módulos de elasticidade. Essas fórmulas são modificadas substituindo os módulos pelas relações de Poisson.

Para laminados virtuais, a computação é feita usando as espessuras arbitradas para as lâminas.

$$v_{yx} = v_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + v_{tec}^{yx} \times \frac{t_{tec}}{t} + v_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + v_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + v_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Geralmente os laminados feitos com fibras UD não usam tecidos e as equações acima podem ser simplificadas para

$$v_{yx} = v_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + v_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + v_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + v_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Para laminados reais, os cálculos são feitos usando os teores de fibras de vidro, de areia e de resina. As lâminas de fibras tecidas são ignoradas, porque elas não são usadas em laminados comerciais feitos com fibras UD e areia.

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,74 \times v_{UD}^{yx} \times (UD) + 0,18 \times (areia) + 0,25 \times K]$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Onde, como visto antes

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right] \text{ é a secura do laminado}$$

$d = \left[\frac{3,12}{1,20+1,40(res)} \right]$ é a densidade do laminado

Os teores de resina, de fibras e de areia são medidos queimando corpos de prova extraídos de laminados reais.

9 – Coeficientes de dilatação. A lei das misturas unidimensional computa os coeficientes de dilatação térmica e hídrica de qualquer laminado usando o conceito de lâminas padrão.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{pic} \times \alpha_{pic} \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times t_{UD} + E_{areia} \times \alpha_{areia} \times t_{areia} + E_r \times \alpha_r \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{E_{pic} \times \alpha_{pic} \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times t_{UD} + E_{areia} \times \alpha_{areia} \times t_{areia} + E_r \times \alpha_r \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

Na equação acima “ α ” representa os coeficientes de dilatação térmica das lâminas e do laminado. Os módulos e os coeficientes de dilatação das lâminas padrão são conhecidos. Entrando esses valores padrão na equação acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times t_{UD} + E_{tec}^x \times \alpha_{tec}^x \times t_{tec} + 0,78 \times t_{areia} + 1,80 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times t_{UD} + E_{tec}^y \times \alpha_{tec}^y \times t_{tec} + 0,78 \times t_{areia} + 1,80 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

Esta expressão calcula os coeficientes de dilatação térmica de laminados virtuais. Os módulos e os coeficientes de dilatação térmica das lâminas padrão são conhecidos com precisão. As espessuras das lâminas são arbitradas pelo projetista. Este protocolo é semelhante ao usado para computar os módulos e as relações de Poisson de laminados virtuais.

Para laminados reais, existentes, os módulos, as espessuras e os coeficientes de dilatação das lâminas são desconhecidos. Nesses casos usamos a fórmula abaixo, baseada nos teores de cada constituinte.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} \frac{4,08 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times (UD) + 0,46 \times (areia) + 1,50 \times K}{E_x} \\ \frac{4,08 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times (UD) + 0,46 \times (areia) + 1,50 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

Onde

$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$ é a secura do laminado

$d = \left[\frac{3,12}{1,20+1,40(res)} \right]$ é a densidade do laminado

Na expressão acima os módulos entram em kg/cm² e os coeficientes de dilatação em 1/C. Como explicado antes, K é a secura do laminado. A equação acima exclui as lâminas de tecido, que nunca são usadas em laminados que contém fibras UD. Os laminados feitos com tecidos são analisados separadamente

Os coeficientes de dilatação hídrica são computados de maneira semelhante.

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17500 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times t_{UD} + 16800 \times t_{areia} + 12000 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{17500 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times t_{UD} + 16800 \times t_{areia} + 12000 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

Para laminados reais, existentes, usamos a fórmula baseada nos teores de cada constituinte.

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,12 \\ 1,20 + 1,40(res) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{40800 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times (UD) + 10000 \times (areia) + 10000 \times K}{E_x} \\ \frac{40800 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times (UD) + 10000 \times (areia) + 10000 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

Onde

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right] \text{ é a secura do laminado.}$$

Essa é a equação dos teores para computar os coeficientes de dilatação hídrica de laminados existentes. Nessa expressão, os módulos entram em kg/cm^2 . Como explicado antes, K é a secura do laminado. Essa equação exclui as lâminas de tecido, visto elas nunca são usadas em laminados que contém fibras UD.

10 – Conclusão. Vamos completar este capítulo resumindo nossas sugestões para computar as propriedades de laminados.

Para computar as propriedades de laminados virtuais, em fase de projeto, o projetista arbitra as espessuras e a sequência das lâminas padrão. O uso de lâminas padrão de espessuras e propriedades conhecidas permite o cálculo imediato dos módulos de tração e de flexão, das relações de Poisson e dos coeficientes de dilatação térmica de qualquer laminado.

Para computar as propriedades de laminados reais, o inspetor queima corpos de prova e determina:

- *A espessura do laminado*
- *A sequência de laminação e a orientação das lâminas UD.*
- *As quantidades (kg/m^2) de fibras e de areia de cada lâmina.*
- *Os teores de fibras, de areia e de resina no laminado.*

Os teores de fibras, de areia e de resina são usados para computar as propriedades de laminados reais.

A espessura do laminado, as quantidades de materiais em cada lâmina e a sequência de laminação, são usadas para computar os módulos de flexão. A computação dos módulos de flexão de laminados a partir dos teores é um processo trabalhoso raramente feito na prática.

Apêndice 1.

Derivando a equação 2

Este apêndice mostra como chegar na equação (2) partindo da equação (1).

O peso P de laminados de densidade d , área A e espessura t é

$$P = A \times d \times t$$

O peso da lâmina padrão de fibras picadas nesse laminado é

$$P_{pic} = A \times d_{pic} \times t_{pic}$$

Lembrando que o teor de fibras picadas nas lâminas padrão é 30%, o teor de fibras picadas no laminado é

$$(pic) = 0,30 \times \frac{A \times d_{pic} \times t_{pic}}{A \times d \times t}$$

Da equação acima tiramos

$$\frac{t_{pic}}{t} = \frac{d \times (pic)}{0,30 \times d_{pic}}$$

Onde

t_{pic} é a espessura padrão da lâmina de fibras picadas

t é a espessura do laminado

d é a densidade do laminado

d_{pic} é a densidade padrão da lâmina de fibras picadas

(pic) é o teor de fibras picadas medido no laminado

0,30 é o teor de fibras picadas na lâmina padrão

Para as demais lâminas o raciocínio é o mesmo

$$\frac{t_{UD}}{t} = \frac{d \times (UD)}{0,70 \times d_{UD}}$$

$$\frac{t_{areia}}{t} = \frac{d \times (areia)}{0,80 \times d_{areia}}$$

$$\frac{t_r}{t} = \frac{d \times \left[(res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right] \right]}{1,00 \times d_{res}}$$

Para computar a relação t_r/t da lâmina de resina pura, os teores de resina presentes nas lâminas padrão de fibras e de areia devem ser subtraídos do total medido no laminado. O teor de resina além ou aquém do embutido nas lâminas padrão é conhecido como *secura* do laminado. A *secura* dos laminados é, portanto, computada pela equação.

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

A relação entre as espessuras da resina e do laminado, t_r/t , pode ser melhor representada como

$$\frac{t_r}{t} = \frac{d \times K}{1,00 \times d_{res}}$$

As relações acima usam as densidades e as espessuras das lâminas padrão, que são conhecidas. A espessura t , a densidade d e os teores são os reais, medidos em corpos de prova. Fazendo as devidas substituições na equação (2.1) obtemos

$$E = E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$E = d \times \left[\frac{E_{pic}(pic)}{0,30 \times d_{pic}} + \frac{E_{UD}(UD)}{0,70 \times d_{UD}} + \frac{E_{areia}(areia)}{0,80 \times d_{areia}} + \frac{E_r \times K}{1,00 \times d_{res}} \right]$$

As densidades e os módulos das lâminas padrão são conhecidos e foram listados no capítulo anterior

$$\frac{E_{pic}}{0,30 \times d_{pic}} = \frac{70000}{0,30 \times 1,43} \cong 163000$$

$$\frac{E_{UD}^x}{0,70 \times d_{UD}} = \frac{E_{UD}^x}{0,70 \times 1,93} \cong 0,74 \times E_{UD}^x$$

$$\frac{E_{UD}^y}{0,70 \times d_{UD}} = \frac{E_{UD}^y}{0,70 \times 1,93} \cong 0,74 \times E_{UD}^y$$

$$\frac{E_{areia}}{0,80 \times d_{areia}} = \frac{60000}{0,80 \times 2,11} \cong 35500$$

$$\frac{E_r}{1,00 \times d_{res}} = \frac{30000}{1,00 \times 1,20} \cong 25000$$

Entrando esses valores na equação acima, obtemos

$$E = d \times [163000(pic) + 0,74 \times E_{UD}(UD) + 35300(areia) + 25000 \times K]$$

A densidade do laminado expressa em função do teor de resina é

$$d = \frac{1}{\left[\frac{(pic) + (UD) + (areia)}{2,6} + \frac{(res)}{1,2} \right]}$$

Lembrando que $(pic) + (UD) + (areia) + (res) = 1$

$$d = \frac{2,60 \times 1,20}{1,20 + 1,40(res)} = \frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)}$$

A equação 2 finalmente aparece, derivada diretamente de (1)

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

Onde K é a secura do laminado, definida como

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

Exemplo 5. Dissemos no capítulo 1 que os módulos das lâminas padrão podem ser obtidos usando equações de micromecânica ou fazendo ensaios de laboratório. O problema com os ensaios de laboratório é a impossibilidade de fazer lâminas padrão com os teores exatos de fibras e de resina. Essa dificuldade pode ser facilmente resolvida, como mostramos em seguida

O ensaio de tração feito em lâmina de fibras picadas revelou as seguintes informações:

$$\begin{aligned} (pic) &= 0,35 \\ (res) &= 0,65 \\ E &= 78\,200 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Vamos usar essas informações para determinar o módulo padrão das lâminas de fibras picadas.

Os corpos de prova são construídos exclusivamente com fibras picadas. A secura K nesse caso é

$$K = (res) - \left[\frac{7}{3}(pic) \right]$$

Os módulos desse laminado são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} X(pic) + 25000 \left[(res) - \frac{7}{3}(pic) \right] \\ X(pic) + 25000 \left[(res) - \frac{7}{3}(pic) \right] \\ Y(pic) + 9610 \left[(res) - \frac{7}{3}(pic) \right] \end{bmatrix}$$

Os parâmetros X e Y na equação acima são desconhecidos, porque estamos supondo que não conhecemos os módulos padrão dos laminados de fibras picadas. Aliás, isso é exatamente o que queremos determinar. Portanto, vamos substituir esses parâmetros pelos seus valores de definição

$$X = \frac{E_{pic}}{1,43 \times 0,3}$$

Onde E_{pic} é o módulo padrão que queremos determinar

Entrando essa expressão para X na equação acima, temos

$$E = \frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \times \left[\frac{E_{pic} \times (pic)}{1,43 \times 0,3} + 25000 \left[(res) - \frac{7}{3}(pic) \right] \right]$$

$$78200 = \frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times 0,65} \times \left[\frac{E_{pic} \times 0,35}{1,43 \times 0,3} + 25000 \left[0,65 - \frac{7}{3} \times 0,35 \right] \right]$$

Resolvendo, obtemos

$$E_{pic} = 70\,000 \text{ kg/cm}^2$$

Como vemos, os módulos padrão podem ser medidos em laboratório ensaiando lâminas com qualquer teor de fibras.

Apêndice 2

Módulos de flexão.

Os laminados de compósitos combinam lâminas de espessuras e módulos diferentes, posicionados de maneira arbitrária. Os módulos de tração, compressão e torção podem ser facilmente computados, porque não dependem da posição das lâminas nos laminados. Porém, os módulos de flexão dependem da posição das lâminas, tornando seu cálculo mais complicado.

Alguns laminados são feitos com um único tipo de lâmina. Como exemplo, citamos os construídos unicamente com fibras picadas, ou com fibras UD enroladas no mesmo ângulo $\pm \theta$. Nesses casos especiais, os laminados são considerados como lâminas de grande espessura, com módulos de tração iguais aos de flexão. Essa é uma conclusão importante. Os laminados feitos com um único tipo de lâmina, ou aqueles onde uma lâmina predomina de maneira evidente, têm módulos de flexão idênticos aos de tração. Essa afirmação é óbvia e nem precisava ser mencionada. Porém, nós insistimos nela para lembrar o leitor que os laminados homogêneos, ou quase homogêneos, têm módulos de flexão iguais aos de tração.

Assim, para laminados feitos unicamente com fibras picadas ou com lâminas UD enroladas com o mesmo ângulo, temos

$$E_x = E'_x$$

$$E_y = E'_y$$

Onde E'_x e E'_y são os módulos de flexão.

A igualdade entre os módulos de tração e de flexão acontece apenas nos laminados quase homogêneos. Para os laminados construídos com lâminas distintas, os módulos de flexão médios são definidos pela rigidez de flexão.

$$\frac{E' \times t^3}{12} = \sum E_i \times I_i$$

$$E' = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i \times I_i$$

Onde

E' é o módulo de flexão do laminado

t é a espessura do laminado

E_i são os módulos das distintas lâminas

I_i são os momentos de inércia das diversas lâminas em relação à superfície neutra do laminado.

O cálculo dos módulos de flexão de laminados não-homogêneos é muito trabalhoso. Neste livro vamos simplificar o trabalho, considerando os laminados comerciais simétricos e com superfícies neutras coincidentes com as superfícies médias. Essa simplificação nem sempre é válida, mas elimina a necessidade de determinar a posição da superfície neutra.

Com essa simplificação, os módulos de flexão de laminados não-homogêneos são calculados pelo protocolo seguinte:

Cálculo da rigidez de flexão. Os módulos E_i das lâminas devem ser conhecidos nas direções globais x e y . As espessuras t_i das lâminas são arbitradas nos laminados virtuais ou calculadas nos reais. As distâncias z_i entre os centros de gravidade das lâminas e a superfície média do laminado são determinadas conhecendo suas espessuras e posições. Assim, os momentos de inércia das lâminas em relação à superfície média do laminado são:

$$I_i = \frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2$$

A rigidez de flexão do laminado é

$$\sum E_i \times I_i = \sum E_i \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

Cálculo da espessura do laminado. A espessura do laminado é a soma das espessuras das lâminas

$$t = \sum t_i$$

Cálculo dos módulos de flexão. Os módulos de flexão do laminado nas direções x e y são

$$E'_x = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^x \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

$$E'_y = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^y \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

Os parâmetros que entram nas equações acima são conhecidos. Para laminados virtuais, em fase de projeto, as espessuras são arbitradas e os módulos padrão são conhecidos. As distâncias z_i são computadas a partir das espessuras t_i e das posições das lâminas. Para

laminados reais, o cálculo é mais complexo, sendo feito muito raramente. Essas colocações são esclarecidas nos exemplos numéricos discutidos no capítulo 3.

Exemplo 6. *Provar que os laminados feitos com um único tipo de lâmina têm módulos de flexão iguais aos de tração.*

A expressão para calcular o módulo de flexão é

$$E' = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

Onde E' é o módulo de flexão do laminado e E_i é o módulo de tração das diversas lâminas. Se o laminado for feito com uma lâmina, temos $E_i = E$, $t = t_i$ e $z_i = 0$.

Portanto,

$$E' = \frac{12}{t^3} \times E \times \frac{t^3}{12}$$

$$E' = E$$

Exemplo 7. *Explique a dificuldade para calcular os módulos de flexão de laminados reais.*

O protocolo de cálculo proposto neste apêndice pode ser usado sem dificuldade para computar o módulo de flexão de laminados virtuais, onde os módulos e as espessuras das lâminas padrão são conhecidos. Porém, para laminados existentes, esse cálculo não é simples, porque os módulos e as espessuras das lâminas reais são desconhecidos.

Em seguida detalhamos o protocolo para calcular o módulo de flexão de laminados existentes.

Primeiro medimos a espessura “t” do laminado existente, antes de fazer a queima. A queima informa as posições, as orientações e as quantidades de fibras e de areia em cada lâmina. Conhecendo essas quantidades e a espessura real do laminado, podemos determinar o excesso (ou escassez) de resina. Esse excesso, ou escassez, deve ser distribuindo entre as lâminas do laminado. Dessa maneira, as lâminas dos laminados reais deixam de ser padrão e seus módulos, espessuras e distancias à superfície média devem ser calculados. Conhecidos esses valores, o protocolo de cálculo dos módulos de flexão é exatamente igual ao descrito acima, usando as propriedades reais das lâminas. Como vemos, a queima de corpos de prova permite computar os módulos de flexão de laminados existentes. Porém, o processo é muito trabalhoso. Na prática os módulos de flexão de laminados reais são raramente computados.

Os laminados hoop-chop são feitos intercalando diversas lâminas de fibras UD90 e de fibras picadas. Da mesma maneira, os laminados feitos manualmente intercalam mantas e tecidos. O cálculo do módulo de flexão nesses casos fica complicado devido à grande quantidade de lâminas finas usadas na construção do laminado. Para facilitar os cálculos, os analistas agrupam essas lâminas de pequena espessura em lâminas equivalentes, de grande espessura. Essa lâmina equivalente facilita a computação do módulo de flexão.

O agrupamento de lâminas é descrito e desenvolvido em exemplos numéricos no capítulo 3.

Capítulo 3

Lei das misturas unidimensional

Módulos de elasticidade e relações de Poisson

1 – Introdução. Este capítulo ilustra o uso da lei das misturas unidimensional no cálculo dos módulos de elasticidade e das relações de Poisson para laminados comerciais. Os cálculos são feitos usando as equações deduzidas no capítulo anterior para laminados virtuais (equação das espessuras) ou reais (equação dos teores). Essas equações, de aparências muito diferentes, derivam uma da outra e dão exatamente os mesmos resultados.

A **equação das espessuras** é usada para computar as propriedades de laminados virtuais, não existentes. O projetista imagina o laminado a ser construído, arbitrando para ele as espessuras e as posições de lâminas padrão. Em seguida ele usa a equação das espessuras para calcular as propriedades desse laminado

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^x \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^y \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\nu_{yx} = \nu_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + \nu_{tec}^{yx} \times \frac{t_{tec}}{t} + \nu_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + \nu_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

O laminado arbitrado deve atender às exigências da aplicação. Se não atender, o processo deve ser repetido. O projetista arbitra outro laminado, e assim sucessivamente, até as condições de uso serem satisfeitas. Geralmente duas ou três tentativas são suficientes para achar um laminado satisfatório.

A **equação dos teores** é usada para computar as propriedades de laminados existentes. As espessuras das lâminas de laminados existentes são desconhecidas e impossíveis de medir. Por isso, a análise é feita usando os teores de areia, de fibras e de resina, que são fáceis de medir queimando corpos de prova.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$\nu_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,74 \times \nu_{UD}^{yx} \times (UD) + 0,18 \times (areia) + 0,25 \times K]$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

Onde K é a secura do laminado

A secura K indica o excesso ou a escassez de resina no laminado, tomando como referência a quantidade que ele teria se fosse feito com lâminas padrão. Se $K > 0$, o laminado tem excesso de resina. Se $K < 0$, ele é seco.

Vamos ilustrar o uso dessas equações computando os módulos de alguns laminados comerciais, reais ou virtuais. As equações acima são precisas, simples de usar e dispensam os caros, demorados e imprecisos ensaios de laboratório.

Vamos iniciar com laminados de fibras picadas.

2 – Laminados virtuais de fibras picadas. Os módulos de laminados virtuais de fibras picadas são computados entrando na equação das espessuras os valores $t_{tec} = t_{UD} = t_{areia} = zero$.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\nu_{yx} = \nu_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Exemplo 1: Um projetista está desenvolvendo um equipamento a ser fabricado com fibras picadas. Para isso ele arbitra as espessuras das lâminas padrão de resina e de fibras. Vamos supor dois cenários, um com $t_{pic} = 4,0$ mm e outro com $t_{pic} = 10,0$ mm. Nossa missão é calcular os módulos desses laminados sabendo que a espessura da lâmina de resina é $t_r = 0,6$ mm (0,30 mm de liner e 0,30 mm de topcoat).

Para a espessura $t = 4,0 + 0,6 = 4,6$ mm, temos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{4,0}{4,6} + 30000 \times \frac{0,6}{4,6} \\ 70000 \times \frac{4,0}{4,6} + 30000 \times \frac{0,6}{4,6} \\ 27000 \times \frac{4,0}{4,6} + 11500 \times \frac{0,6}{4,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64780 \\ 64780 \\ 24980 \end{bmatrix} kg/cm^2$$

Para a espessura $t = 10,0 + 0,6 = 10,6$ mm, temos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{10,0}{10,6} + 30000 \times \frac{0,6}{10,6} \\ 70000 \times \frac{10,0}{10,6} + 30000 \times \frac{0,6}{10,6} \\ 27000 \times \frac{10,0}{10,6} + 11500 \times \frac{0,6}{10,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67730 \\ 67730 \\ 26120 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = \nu_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$\nu_{yx} = 0,3 \times \frac{10,0}{10,6} + 0,3 \times \frac{0,6}{10,6} = 0,30$$

$$\nu_{xy} = 0,30 \times \frac{67730}{67730} = 0,30$$

Para reduzir custos, os fabricantes muitas vezes diminuem a quantidade de resina arbitrada pelo projetista. Eles podem fazer isso, desde que a quantidade de fibras seja mantida. Vamos supor que o fabricante corte 2,0 mm na espessura do laminado sugerido pelo projetista. Com esse corte, a espessura projetada passa a ser $t = 10,6 - 2,0 = 8,6$ mm.

Como a quantidade de fibras é mantida, a redução de 2,0 mm ocorre na resina, cuja espessura passa a ser $t_r = 0,6 - 2,0 = -1,4$ mm. Note que a espessura da resina passa a ser negativa, indicando menor quantidade que o padrão. Nessas condições, os módulos do laminado de espessura 8,6 mm são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{10,0}{8,6} - 30000 \times \frac{1,4}{8,6} \\ 70000 \times \frac{10,0}{8,6} - 30000 \times \frac{1,4}{8,6} \\ 27000 \times \frac{10,0}{8,6} - 11500 \times \frac{1,4}{8,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76510 \\ 76510 \\ 29520 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Observe que o laminado com menos resina tem módulos mais altos que o padrão, como deve ser. Os laminados de fibras picadas são homogêneos e têm os módulos de flexão iguais aos de tração.

As relações de Poisson permanecem as mesmas, como pode ser visto pelos cálculos abaixo.

$$\nu_{yx} = \nu_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$\nu_{yx} = 0,3 \times \frac{10,0}{8,6} - 0,3 \times \frac{1,4}{8,6} = 0,30$$

$$\nu_{xy} = 0,30 \times \frac{76510}{76510} = 0,30$$

3 – Laminados reais de fibras picadas. Os módulos de laminados reais de fibras picadas são computados pela equação dos teores fazendo (UD) = (areia) = zero.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$\nu_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,25 \times K]$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$K = (res) - \left[\frac{7}{3}(pic) \right]$$

Onde K é a secra do laminado

Exemplo 2. A queima de um laminado de fibras picadas revelou os teores $(res) = 0,65$ e $(pic) = 0,35$. Computar os módulos desse laminado.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,65)} \right] \begin{bmatrix} 163000 \times 0,35 + 25000 \left[0,65 - \frac{7}{3} \times 0,35 \right] \\ 163000 \times 0,35 + 25000 \left[0,65 - \frac{7}{3} \times 0,35 \right] \\ 63000 \times 0,35 + 9610 \left[0,65 - \frac{7}{3} \times 0,35 \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78200 \\ 78200 \\ 30180 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Esse laminado é feito com um único tipo de lâmina e por isso tem os módulos de flexão iguais aos de tração.

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,65)} \right] [0,70 \times (0,35) - 0,25 \times 0,17] = 0,30$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y} = 0,30 \times \frac{78200}{78200} = 0,30$$

Exemplo 3. Calcular o teor de vidro de um laminado de fibras picadas cujo módulo é $E = 90.000$ kg/cm².

$$E = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \times \left[163000(pic) + 25000 \left[(res) - \frac{7}{3} \times (pic) \right] \right]$$

Entrando na equação acima com $(res) + (pic) = 1$ e $E = 90000$ kg/cm², obtemos

$$90000 = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(1 - pic)} \right] \times \left[163000(pic) + 25000 \left[(1 - (pic)) - \frac{7}{3} \times (pic) \right] \right]$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$(pic) = 0,42$$

Esses exemplos ilustram o enorme poder das lâminas padrão no cálculo das propriedades de laminados. Esse método computa com precisão os módulos, as relações de Poisson e os coeficientes de dilatação de qualquer laminado, dispensando os caros, demorados e muitas vezes imprecisos ensaios feitos em laboratório.

Passemos agora aos laminados manuais, que combinam mantas e tecidos.

4 – Laminados combinando M450 + T600. As propriedades elásticas de laminados feitos com “M” lâminas de manta M450 e “T” lâminas de tecido T600 são computados usando a equação das espessuras e os dados da tabela 3 do capítulo 1. A equação dos teores não foi desenvolvida para esses laminados, porque as lâminas padrão de mantas e de tecidos têm espessuras conhecidas. Os módulos e as relações de Poisson de laminados reais, feitos com mantas e tecidos, podem ser facilmente computados usando a equação das espessuras, sem precisar da equação dos teores. Para isso, basta medir a espessura do laminado e determinar o número das lâminas M e T queimando corpos de prova. A espessura da lâmina de resina t_r é calculada e a equação das espessuras serve bem para computar os módulos de laminados reais. A discussão que segue esclarece esses pontos.

Sabemos que as lâminas M450 têm espessura padrão $t_{pic} = 1,05$ mm e as T600 têm espessura padrão $t_{tec} = 0,85$ mm. Sendo assim, os laminados feitos com M lâminas M450 e T lâminas T600 têm espessura

$$t = 1,05M + 0,85T + t_r$$

Onde t é a espessura do laminado, M é o número de mantas M450, T é o número de tecidos T600 e t_r é a espessura da lâmina de resina. Fazendo $(UD) = 0$ e $(areia) = 0$ na equação das espessuras, obtemos

Para a direção “x” do laminado

$$E_x = \frac{70000 \times 1,05M + 112000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

Para a direção ”y”

$$E_y = \frac{70000 \times 1,05M + 180000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

O módulo de cisalhamento é

$$G_{xy} = \frac{27000 \times 1,05M + 24000 \times 0,85T + 11500 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = \nu_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + \nu_{tec}^{yx} \times \frac{t_{tec}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$\nu_{yx} = 0,30 \times \frac{1,05 \times M}{t} + 0,30 \times \frac{0,85 \times T}{t} + 0,30 \times \frac{t_r}{t} = 0,30$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$\nu_{xy} = 0,30 \times \frac{E_x}{E_y}$$

Essas fórmulas valem para computar os módulos e as relações de Poisson de qualquer laminado feito com M lâminas de manta M450 e T lâminas de tecido T600. Para laminados virtuais, em

fase de projeto, o projetista arbitra a espessura t_r da lâmina de resina. Como dissemos, em geral essa espessura para laminados virtuais é $t_r = 0,6$ mm, correspondente ao liner e ao topcoat. Para laminados reais, t_r é obtida medindo a espessura t do laminado e usando a equação

$$t_r = t - (1,05M + 0,85T)$$

Exemplo 4. Determinar os módulos e as relações de Poisson de um laminado feito com $M = 4$ lâminas M450 e $T = 2$ lâminas T600. A espessura da lâmina de resina é $t_r = 0,6$ mm.

$$E_x = \frac{70000 \times 1,05M + 112000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

$$E_x = \frac{70000 \times 1,05 \times 4 + 112000 \times 0,85 \times 2 + 30000 \times 0,6}{1,05 \times 4 + 0,85 \times 2 + 0,6} = 77290 \text{ kg/m}^2$$

$$E_y = \frac{70000 \times 1,05M + 180000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

$$E_y = \frac{70000 \times 1,05 \times 4 + 180000 \times 0,85 \times 2 + 30000 \times 0,6}{1,05 \times 4 + 0,85 \times 2 + 0,6} = 95070 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{xy} = \frac{27000 \times 1,05 \times 4 + 24000 \times 0,85 \times 2 + 11500 \times 0,6}{1,05 \times 4 + 0,85 \times 2 + 0,6} = 24780 \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson para esse laminado são

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{1,05 \times M}{t} + 0,30 \times \frac{0,85 \times T}{t} + 0,30 \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{1,05 \times 4}{6,50} + 0,30 \times \frac{0,85 \times 2}{6,50} + 0,30 \times \frac{0,6}{6,50} = 0,30$$

$$v_{xy} = 0,30 \times \frac{77290}{95070} = 0,24$$

5 – Laminados combinando M450 + T800. Os módulos de laminados feitos com “M” lâminas M450 e “T” lâminas T800 são obtidas de maneira análoga

Para a direção “x” do laminado

$$E_x = \frac{70000 \times 1,05M + 170000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

Para a direção ”y”

$$E_y = \frac{70000 \times 1,05M + 190000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

O módulo de cisalhamento é

$$G_{xy} = \frac{27000 \times 1,05M + 27500 \times 0,85T + 11500 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

As relações de Poisson são

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{1,05 \times M}{t} + 0,30 \times \frac{0,85 \times T}{t} + 0,30 \times \frac{t_r}{t} = 0,30$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$v_{xy} = 0,30 \times \frac{E_x}{E_y}$$

Essas fórmulas computam os módulos e as relações de Poisson de qualquer laminado feito com M lâminas de manta M450 e T lâminas de tecido T800. Para laminados virtuais, em fase de projeto, o projetista arbitra a espessura t_r da lâmina de resina. Como dissemos, em geral essa espessura é $t_r = 0,6$ mm, correspondente ao liner e ao topcoat. Para laminados reais, t_r é obtida medindo a espessura t do laminado e usando a equação

$$t_r = t - (1,05M + 0,85T)$$

Exemplo 5. Determinar os módulos de um laminado com $M = 4$ lâminas M450 e $T = 2$ lâminas T800. A espessura da lâmina de resina é $t_r = 0,6$ mm.

$$E_x = \frac{70000 \times 1,05M + 170000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

$$E_x = \frac{70000 \times 1,05 \times 4 + 170000 \times 0,85 \times 2 + 30000 \times 0,6}{1,05 \times 4 + 0,85 \times 2 + 0,6} = 92460 \text{ kg/m}^2$$

$$E_y = \frac{70000 \times 1,05M + 190000 \times 0,85T + 30000 \times t_r}{1,05M + 0,85T + t_r}$$

$$E_y = \frac{70000 \times 1,05 \times 4 + 190000 \times 0,85 \times 2 + 30000 \times 0,6}{1,05 \times 4 + 0,85 \times 2 + 0,6} = 97700 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{xy} = \frac{27000 \times 1,05 \times 4 + 27500 \times 0,85 \times 2 + 11500 \times 0,6}{1,05 \times 4 + 0,85 \times 2 + 0,6} = 25700 \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson para esse laminado são

$$v_{yx} = 0,30$$

$$v_{xy} = 0,30 \times \frac{92460}{97700} = 0,28$$

Exemplo 6. A queima de um laminado construído com M450 e T800 revelou espessura $t = 8,3$ mm e construção com $M = 6$ e $T = 4$.

Determinar os módulos de tração e de cisalhamento desse laminado.

A espessura projetada, considerando as lâminas identificadas, é

$$t = 6 \times 1,05 + 4 \times 0,85 + 0,6 = 10,30 \text{ mm}$$

Como a espessura medida é 8,30 mm, concluímos que o fabricante cortou $10,30 - 8,30 = 2,00$ mm na espessura projetada. Esse corte ocorre inteiramente nas lâminas estruturais, visto que as espessuras do liner e do topcoat devem ser mantidas para somar 0,6 mm. Essa informação é importante para

calcular os módulos de flexão, o que faremos mais adiante. No momento vamos ao cálculo dos módulos de tração e de cisalhamento.

Os módulos de tração e de cisalhamento são obtidos diretamente da equação das espessuras, fazendo as espessuras das lâminas de areia e de fibras UD iguais a zero. A espessura do laminado é 8,30 mm. Com o corte de 2,0 mm, a espessura da lâmina de resina passa a ser negativa $t_r = 0,6 - 2,0 = -1,4$ mm.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^x \times \frac{t_{tec}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^y \times \frac{t_{tec}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{6 \times 1,05}{8,3} + 170000 \times \frac{4 \times 0,85}{8,3} + 30000 \times \frac{(0,6 - 2,0)}{8,3} \\ 70000 \times \frac{6 \times 1,05}{8,3} + 190000 \times \frac{4 \times 0,85}{8,3} + 30000 \times \frac{(0,6 - 2,0)}{8,3} \\ 27000 \times \frac{6 \times 1,05}{8,3} + 27500 \times \frac{4 \times 0,85}{8,3} + 11500 \times \frac{(0,6 - 2,0)}{8,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117710 \\ 130960 \\ 29820 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Como vemos, os módulos de tração e de cisalhamento são fáceis de calcular. Passemos agora ao cálculo dos módulos de flexão.

Exemplo 7. Computar os módulos de flexão do laminado real analisado no exemplo anterior. O cálculo dos módulos de flexão é mais trabalhoso que o dos módulos de tração. Para melhor entender o protocolo, o leitor deve observar atentamente a figura 1.

O primeiro detalhe a ser notado é que o laminado analisado não é simétrico e sua superfície neutra não coincide com a superfície média. Porém, para simplificar, vamos supor que a superfície média coincida com a superfície neutra. Em segundo lugar, para acomodar o corte de resina, as espessuras reais das lâminas de mantas e de tecidos devem ser menores que as espessuras padrão. Vejamos como calcular as espessuras reais.

8.30 mm	①	LINER	0.30
	②	M	0.82
	③	M	0.82
	④	T	0.70
	⑤	M	0.82
	⑥	T	0.70
	⑦	M	0.82
	⑧	T	0.70
	⑨	M	0.82
	⑩	T	0.70
	⑪	M	0.82
	⑫	TOPCOAT	0.30

Figura 1

Laminado real mostrando as espessuras das lâminas após alocação do excesso de resina.

As espessuras do liner e do topcoat são especificadas em normas e devem ser preservadas. Isso significa que o decréscimo de espessura correspondente ao corte de resina acontece inteiramente nas lâminas de mantas e de tecidos. Portanto, temos que distribuir a redução de 2,0 mm nas espessuras das mantas e dos tecidos.

Essa distribuição é feita proporcionalmente à quantidade de resina normalmente absorvida em cada lâmina. Fazendo a correção, as espessuras reais das lâminas são:

$$t_{manta} = 1,05 - \frac{450 \times \frac{7}{3}}{6 \times 450 \times \frac{7}{3} + 4 \times 800 \times \frac{46}{54}} \times 2,0 = 0,82 \text{ mm}$$

$$t_{T800} = 0,85 - \frac{800 \times \frac{46}{54}}{6 \times 450 \times \frac{7}{3} + 4 \times 800 \times \frac{46}{54}} \times 2,0 = 0,70 \text{ mm}$$

A soma das espessuras reais das lâminas deve produzir a espessura total do laminado

$$t = 6 \times 0,82 + 4 \times 0,70 + 0,6 = 8,30 \text{ mm}$$

Os módulos das lâminas T800 e M450 com essas novas espessuras são

$$E_{tec}^x = 170000 \times \frac{0,85}{0,70} - 30000 \times \frac{(0,85 - 0,70)}{0,70} = 200000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{tec}^y = 190000 \times \frac{0,85}{0,70} - 30000 \times \frac{(0,85 - 0,70)}{0,70} = 224280 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{pic}^y = E_{pic}^x = 70000 \times \frac{1,05}{0,82} - 30000 \times \frac{(1,05 - 0,82)}{0,82} = 81220 \text{ kg/cm}^2$$

A superfície média do laminado, que supomos ser a superfície neutra, dista das faces externas do laminado $8,30/2 = 4,15 \text{ mm}$. Para calcular os módulos de flexão, é necessário conhecer as distâncias

dos centros de gravidade das lâminas à superfície média do laminado. Essas distâncias podem ser facilmente calculadas considerando as espessuras e as posições das lâminas. Por exemplo, as distâncias dos centros das lâminas de resina, numeradas na figura como 1 e 12, à superfície média do laminado são $z_1 = z_{12} = 4,15 - 0,3/2 = 4,00$ mm. Analogamente, as distâncias para as duas lâminas extremas de M450 são $z_2 = z_{11} = 4,15 - (0,3 + 0,82/2) = 3,44$ mm. Essas distâncias z_i devem ser determinadas para as 12 lâminas.

Os módulos de flexão são calculados pelas expressões

$$E'_x = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^x \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

$$E'_x = \frac{12}{8,3^3} \times \left[2 \times 30000 \left(\frac{0,3^3}{12} + 0,30 \times 4,0^2 \right) + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 3,44^2 \right) \right. \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 2,64^2 \right) + 200000 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 1,88^2 \right) \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 1,12^2 \right) + 200000 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 0,36^2 \right) \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 0,40^2 \right) + 200000 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 1,16^2 \right) \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 1,92^2 \right) + 200000 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 2,68^2 \right) \\ \left. + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 3,44^2 \right) \right]$$

$$E'_x = 94900 \text{ kg/cm}^2$$

$$E'_y = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^y \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

$$E'_y = \frac{12}{8,3^3} \times \left[2 \times 30000 \left(\frac{0,3^3}{12} + 0,30 \times 4,0^2 \right) + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 3,44^2 \right) \right. \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 2,64^2 \right) + 224280 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 1,88^2 \right) \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 1,12^2 \right) + 224280 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 0,36^2 \right) \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 0,40^2 \right) + 224280 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 1,16^2 \right) \\ + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 1,92^2 \right) + 224280 \left(\frac{0,70^3}{12} + 0,70 \times 2,68^2 \right) \\ \left. + 81220 \left(\frac{0,82^3}{12} + 0,82 \times 3,44^2 \right) \right]$$

$$E'_y = 99300 \text{ kg/cm}^2$$

Como vemos, o protocolo de cálculo dos módulos de flexão é muito trabalhoso. No caso analisado, como o laminado não é simétrico, tivemos que calcular as contribuições individuais das 12 lâminas. Para laminados simétricos, basta calcular a contribuição de metade das lâminas e multiplicar o resultado por dois.

Mais adiante veremos como agrupar lâminas para simplificar esse protocolo.

6 – Laminados cruzados UD55. As propriedades elásticas de laminados cruzados UD55 são computadas usando as equações gerais sem as lâminas de tecido e de areia.

Para laminados UD55 virtuais, com barreira de corrosão de fibras picadas, a equação das espessuras é

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = v_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + v_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + v_r \times \frac{t_r}{t}$$

Os módulos e as relações de Poisson das lâminas padrão UD55 expressas no sistema global x – y são.

$$E_{UD}^x = 96300 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD}^y = 170800 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{UD} = 101200 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{UD}^{yx} = 0,70$$

Entrando esses valores nas equações acima obtemos, para laminados virtuais

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 96300 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 170800 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 27000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 101200 \times \frac{t_{UD}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{t_{pic}}{t} + 0,70 \times \frac{t_{UD}}{t} + 0,30 \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Para laminados reais, os módulos e as relações de Poisson são computados pela equação dos teores, sem as lâminas de fibras tecidas e de areia.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 71260(UD) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 126400(UD) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 74850(UD) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,74 \times v_{UD}^{yx} \times (UD) + 0,25 \times K]$$

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,74 \times 0,70 \times (UD) + 0,25 \times K]$$

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,52 \times (UD) + 0,25 \times K]$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) \right]$$

Exemplo 8. O fabricante decide cortar 20% da resina de um laminado UD55 projetado com espessura $t = 8,6$ mm e sem barreira de corrosão. Computar a espessura, os módulos e as relações de Poisson do laminado resultante.

Como o laminado não tem barreira de corrosão, a espessura t_{UD} de projeto é computada subtraindo a espessura da resina (0,6 mm) da espessura total

$$t_{UD} = 8,6 - 0,6 = 8,0 \text{ mm}$$

A quantidade projetada de resina é

$$Q_{res} = 1,93 \times 8,0 \times 0,3 + 1,20 \times 0,6 = 5,35 \text{ kg/m}^2$$

O corte de 20% na resina reduz a espessura do laminado em

$$0,20 \times \frac{5,35}{1,20} = 0,89 \text{ mm}$$

Como as espessuras do liner e do topcoat não podem ser mudadas, a redução de 0,89 mm acontece nas lâminas UD, cuja espessura total passa de 8,0 mm para $8,0 - 0,89 = 7,11$ mm. A espessura do laminado passa de 8,6 para $8,6 - 0,89 = 7,71$ mm.

Os módulos do laminado com essas espessuras são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96300 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 170800 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 101200 \times \frac{t_{UD}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96300 \times \frac{8,0}{7,71} + 30000 \times \frac{(0,6 - 0,89)}{7,71} \\ 170800 \times \frac{8,0}{7,71} + 30000 \times \frac{(0,6 - 0,89)}{7,71} \\ 101200 \times \frac{8,0}{7,71} + 11500 \times \frac{(0,6 - 0,89)}{7,71} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98800 \\ 176100 \\ 104550 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Os módulos de flexão de laminados homogêneos, feitos com um único tipo de lâmina, são iguais aos de tração

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = \nu_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$\nu_{yx} = 0,70 \times \frac{8,0}{7,71} + 0,30 \times \frac{(0,6 - 0,89)}{7,71} = 0,72$$

$$\nu_{xy} = 0,72 \times \frac{98800}{176100} = 0,40$$

Exemplo 9. Computar os módulos e as relações de Poisson de um laminado cruzado UD55 de espessura 10,0 mm e peso 18,0 kg/m². O laminado não tem barreira de corrosão e $t_{pic} = 0$.

A densidade do laminado é obtida usando a expressão $P = Ad\rho$. Nesse caso $P = 18 \text{ kg/m}^2$, $A = 1 \text{ m}^2$ e $t = 10,0 \text{ mm}$.

$$d = \frac{18}{10} = 1,8 \text{ g/cm}^3$$

O teor de vidro é obtido a partir da densidade

$$d = 1,8 = \frac{1}{\frac{(UD)}{2,6} + \frac{[1-(UD)]}{1,2}}$$

De onde obtemos $(UD) = 0,62$.

O teor de vidro calculado $(UD) = 0,62$ é menor que o valor padrão $(UD) = 0,70$. Isso significa que o laminado tem excesso de resina. Conhecendo o teor de vidro $(UD) = 0,62$, a quantidade de fibras UD por metro quadrado é

$$Q_{UD} = 0,62 \times 18 = 11,16 \text{ kg/m}^2$$

A espessura padrão correspondente a essa quantidade de fibras UD é

$$t_{UD} = \frac{11,16}{0,7 \times 1,93} = 8,26 \text{ mm}$$

A espessura da lâmina de resina é

$$t_r = 10,0 - 8,26 = 1,74 \text{ mm}$$

Onde $t = 10,0 \text{ mm}$ é a espessura real do laminado.

Os módulos do laminado são obtidos usando a equação

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96300 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 170800 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 101200 \times \frac{t_{UD}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96300 \times \frac{8,26}{10} + 30000 \times \frac{1,74}{10} \\ 170800 \times \frac{8,26}{10} + 30000 \times \frac{1,74}{10} \\ 101200 \times \frac{8,26}{10} + 11500 \times \frac{1,74}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84768 \\ 146300 \\ 85600 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = 0,70 \times \frac{8,26}{10,0} + 0,30 \times \frac{1,74}{10,0} = 0,63$$

$$\nu_{xy} = 0,63 \times \frac{84768}{146300} = 0,37$$

7 – Laminados cruzados UD70. O protocolo de cálculo para esses laminados é idêntico ao usado na seção anterior para laminados UD55. Os módulos e as relações de Poisson das lâminas padrão UD70 no sistema global x – y são

$$E_{UD}^x = 92800 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD}^y = 298200 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{UD} = 66000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu_{UD}^{yx} = 0,59$$

Para laminados UD70 virtuais, temos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 92800 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 298200 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 27000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 66000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\nu_{yx} = \nu_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + \nu_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + \nu_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{t_{pic}}{t} + 0,59 \times \frac{t_{UD}}{t} + 0,30 \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Para laminados UD70 reais, os módulos e as relações de Poisson são computados pelas equações dos teores, sem as lâminas de tecido e de areia.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 68672(UD) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 220668(UD) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 48840(UD) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,54 \times (UD) + 0,25 \times K]$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) \right]$$

Exemplo 10. Computar os módulos e as relações de Poisson do laminado UD70 feito com $t_{pic} = 2,10$ mm, $t_{UD} = 8,0$ mm e $t_r = 0,6$ mm.

A espessura do laminado é $2,10 + 8,0 + 0,6 = 10,70$ mm. Os módulos são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{2,10}{10,7} + 92800 \times \frac{8,0}{10,7} + 30000 \times \frac{0,6}{10,7} \\ 70000 \times \frac{2,10}{10,7} + 298200 \times \frac{8,0}{10,7} + 30000 \times \frac{0,6}{10,7} \\ 27000 \times \frac{2,10}{10,7} + 66000 \times \frac{8,0}{10,7} + 11500 \times \frac{0,6}{10,7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84800 \\ 238370 \\ 55290 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson são

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{2,10}{10,7} + 0,59 \times \frac{8,0}{10,7} + 0,30 \times \frac{0,6}{10,7} = 0,52$$

$$v_{xy} = 0,52 \times \frac{84800}{238370} = 0,18$$

8 – Laminados hoop-chop virtuais. Os laminados hoop-chop nunca usam tecidos. Eliminando as lâminas de tecido nas equações gerais, as equações das espessuras para calcular os módulos e as relações de Poisson de laminados hoop-chop são.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = v_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + v_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + v_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + v_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

Os módulos e as relações de Poisson das lâminas padrão UD90 nas direções x e y dos laminados hoop-chop são

$$E_{UD}^x = 100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD}^y = 400000 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{UD} = 35000 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{UD}^{yx} = 0,30$$

Entrando esses valores nas equações acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 100000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 60000 \times \frac{t_{areia}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 400000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 60000 \times \frac{t_{areia}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 27000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 35000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 23000 \times \frac{t_{areia}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{t_{pic}}{t} + 0,30 \times \frac{t_{UD}}{t} + 0,30 \times \frac{t_{areia}}{t} + 0,30 \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \left(\frac{t_{pic} + t_{UD} + t_{areia} + t_r}{t} \right) = 0,30$$

$$v_{xy} = 0,30 \times \frac{E_x}{E_y}$$

Exemplo 11 – As espessuras padrão arbitradas para um laminado hoop-chop em fase de projeto são

$$t_{pic} = 3,0 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = 2,0 \text{ mm}$$

$$t_{areia} = 13,0 \text{ mm}$$

$$t_r = 0,6 \text{ mm}$$

A espessura de projeto é

$$t = 3,0 + 2,0 + 13,0 + 0,6 = 18,6 \text{ mm}$$

Os módulos projetados são computados usando a equação

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{3,0}{18,6} + 100000 \times \frac{2,0}{18,6} + 60000 \times \frac{13,0}{18,6} + 30000 \times \frac{0,6}{18,6} \\ 70000 \times \frac{3,0}{18,6} + 400000 \times \frac{2,0}{18,6} + 60000 \times \frac{13,0}{18,6} + 30000 \times \frac{0,6}{18,6} \\ 27000 \times \frac{3,0}{18,6} + 35000 \times \frac{2,0}{18,6} + 23000 \times \frac{13,0}{18,6} + 11500 \times \frac{0,6}{18,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64950 \\ 97200 \\ 24960 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson projetadas são

$$\nu_{yx} = 0,30$$

$$\nu_{xy} = 0,30 \times \frac{64950}{97200} = 0,20$$

O projetista pode computar os módulos usando a equação dos teores a ser mostrada em seguida. Para isso ele precisa determinar os teores de fibras, de areia e de resina correspondentes às espessuras arbitradas. O procedimento para fazer isso foi mostrado no capítulo 2. Os dois protocolos são equivalentes e produzem os mesmos resultados.

O conceito de lâminas padrão torna muito simples a computação das relações de Poisson, dos módulos e das espessuras de laminados hoop-chop em fase de projeto. Com as informações do projetista, o fabricante pode fazer seus equipamentos. Como dito antes, o fabricante muitas vezes corta um pouco a quantidade de resina sugerida no projeto. Ele pode fazer isso, desde que as quantidades de fibras e de areia sejam mantidas.

9 – Laminados hoop-chop reais. Os módulos e as relações de Poisson de laminados hoop-chop reais, existentes, são computados usando as equações dos teores sem as lâminas de tecido. Os módulos e as relações de Poisson das lâminas UD90 padrão nas direções x e y dos laminados hoop-chop são

$$E_{UD}^x = 100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD}^y = 400000 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_{UD} = 35000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu_{UD}^{yx} = 0,30$$

Entrando esses valores nas equações dos teores, obtemos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 74000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 296000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 26000(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$\nu_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,22 \times (UD) + 0,18 \times (areia) + 0,25 \times K]$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \times \frac{E_x}{E_y}$$

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

Os teores de fibras, de areia e de resina são computados queimando e pesando corpos de prova extraídos do laminado existente.

Exemplo 12 – A queima de corpos de prova extraídos de um laminado hoop-chop indicou a composição seguinte

$$\begin{aligned}(pic) &= 0,15 \\(UD) &= 0,25 \\(areia) &= 0,15 \\(res) &= 0,45\end{aligned}$$

Computar as relações de Poisson e os módulos de tração desse laminado.

A secura do laminado é

$$K = 0,45 - \left[\frac{3}{7} \times 0,25 + \frac{7}{3} \times 0,15 + \frac{2}{8} \times 0,15 \right] = -0,04$$

A secura negativa indica que o laminado é ligeiramente seco em relação ao padrão.

Os módulos são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times 0,45} \right] \begin{bmatrix} 163000 \times 0,15 + 74000 \times 0,25 + 35500 \times 0,15 - 25000 \times 0,04 \\ 163000 \times 0,15 + 296000 \times 0,25 + 35500 \times 0,15 - 25000 \times 0,04 \\ 63000 \times 0,15 + 26000 \times 0,25 + 13600 \times 0,15 - 9610 \times 0,04 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80400 \\ 175000 \\ 29800 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Esses módulos são exatos, porque foram computados usando os teores de fibras, de areia e de resina, medidos em corpos de prova extraídos do laminado. Os laminados hoop-chop são feitos combinando lâminas distintas, tendo módulos de flexão diferentes dos de tração. Mais adiante vamos mostrar como calcular os módulos de flexão.

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = 0,30$$

$$\nu_{xy} = 0,30 \times \frac{80400}{175000} = 0,14$$

Exemplo 13. Vamos acompanhar o processo de criação de um laminado hoop-chop. Como o laminado não existe, o projetista arbitra a sequência de laminação e as quantidades de fibras e de areia nas lâminas padrão. A construção seguinte foi arbitrada:

860 g/m² de fibras picadas
4050 g/m² de fibras UD enroladas com ângulo 90 graus.
13500 g/m² de areia
4050 g/m² de fibras UD enroladas com ângulo 90 graus.
860 g/m² de fibras picadas

Observe que a construção arbitrada é simétrica e a superfície neutra do laminado proposto coincide com a superfície média.

Em seguida o projetista determina as espessuras das lâminas padrão correspondentes às quantidades arbitradas. Isso é feito usando as expressões derivadas no capítulo 1.

$$Q_{pic} = 0,30 \times 1,43 \times t_{pic} = 0,43 \times t_{pic}$$

$$t_{pic} = \frac{0,860}{0,43} = 2,0 \text{ mm}$$

$$Q_{UD} = 0,70 \times 1,93 \times t_{UD} = 1,35 \times t_{UD}$$

$$t_{UD} = \frac{4,050}{1,35} = 3,0 \text{ mm}$$

$$Q_{areia} = 0,80 \times 2,11 \times t_{areia} = 1,69 \times t_{areia}$$

$$t_{areia} = \frac{13,500}{1,69} = 8,0 \text{ mm}$$

A espessura padrão do laminado proposto é

$$t = 0,3 + 2,0 + 3,0 + 8,0 + 3,0 + 2,0 + 0,3 = 18,6 \text{ mm}$$

Observe que o laminado proposto inclui $t_r = 0,6 \text{ mm}$ para as lâminas de resina do liner e do topcoat.

Os módulos de tração e de cisalhamento desse laminado são dados pela equação das espessuras

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 100000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 60000 \times \frac{t_{areia}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 400000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 60000 \times \frac{t_{areia}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 27000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 35000 \times \frac{t_{UD}}{t} + 23000 \times \frac{t_{areia}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{4,0}{18,6} + 100000 \times \frac{6,0}{18,6} + 60000 \times \frac{8,0}{18,6} + 30000 \times \frac{0,6}{18,6} \\ 70000 \times \frac{4,0}{18,6} + 400000 \times \frac{6,0}{18,6} + 60000 \times \frac{8,0}{18,6} + 30000 \times \frac{0,6}{18,6} \\ 27000 \times \frac{4,0}{18,6} + 35000 \times \frac{6,0}{18,6} + 23000 \times \frac{8,0}{18,6} + 11500 \times \frac{0,6}{18,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74086 \\ 170860 \\ 27360 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson são

$$\nu_{yx} = 0,30$$

$$\nu_{xy} = 0,30 \times \frac{74086}{170860} = 0,13$$

Essas são as propriedades do laminado proposto pelo projetista, calculadas usando as equações das espessuras. Essas propriedades podem ser determinadas também pelas equações dos teores. O exemplo que segue mostra como obter os teores a partir das espessuras.

Exemplo 14. No exemplo anterior, as quantidades de fibras e de areia por metro quadrado foram arbitradas pelo projetista. A quantidade de resina por metro quadrado correspondente a essas quantidades de fibras e de areia é calculada pela fórmula abaixo, desenvolvida na seção 2.4.1 do capítulo anterior.

$$Q_{res} = t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r$$

$$Q_{res} = 4,0 + 0,58 \times 6,0 + 0,42 \times 8,0 + 1,20 \times 0,6 = 11,56 \text{ kg/m}^2$$

O peso total do laminado é

$$Peso = 11,56 + 2 \times 0,860 + 2 \times 4,050 + 13,500 = 34,88 \text{ kg/m}^2$$

Os teores de fibras, de areia e de resina são

$$(pic) = \frac{2 \times 0,860}{34,88} = 0,05$$

$$(UD) = \frac{2 \times 4,050}{34,88} = 0,23$$

$$(areia) = \frac{13,500}{34,88} = 0,39$$

$$(res) = \frac{11,56}{34,88} = 0,33$$

Aplicando a equação dos teores, obtemos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 74000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 296000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 26000(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

$$K = (0,33) - \left[\frac{3}{7}(0,23) + \frac{7}{3}(0,05) + \frac{2}{8}(0,39) \right] = 0,02$$

O laminado tem um ligeiro excesso de resina, correspondente às lâminas do liner e do topcoat.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,33)} \right] \begin{bmatrix} 163000(0,05) + 74000(0,23) + 35500(0,39) + 25000 \times 0,02 \\ 163000(0,05) + 296000(0,23) + 35500(0,39) + 25000 \times 0,02 \\ 63000(0,05) + 26000(0,23) + 13600(0,39) + 9610 \times 0,02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74149 \\ 170032 \\ 27450 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Esses valores são idênticos aos calculados pelas equações das espessuras, como deve ser.

Exemplo 15. Computar os módulos de flexão do laminado virtual proposto no exemplo 14.

Para computar os módulos de flexão desse laminado virtual, é preciso conhecer as distâncias dos centros de todas as lâminas à superfície média do laminado. Essas distâncias são facilmente calculadas conhecendo as espessuras das lâminas e a seqüência de laminação. Na prática, a lâmina de fibras

picadas é combinada com a de fibras UD para dar uma lâmina grossa, homogênea, de espessura $2,0 + 3,0 = 5,0$ mm. O laminado usado na prática é mostrado à direita na figura 2.

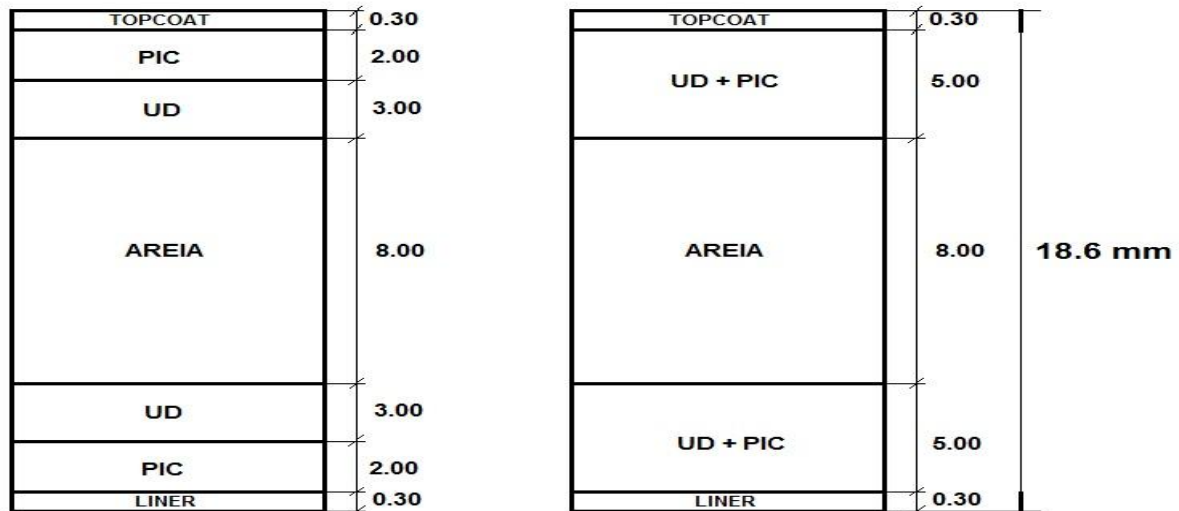


Figura 2

Na prática as lâminas de fibras picadas são combinadas com as de fibras UD para dar uma lâmina única, homogênea, de espessura $2,0 + 3,0 = 5,0$ mm.

Os módulos da lâmina grossa, homogênea, são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{2,0}{5,0} + 100000 \times \frac{3,0}{5,0} \\ 70000 \times \frac{2,0}{5,0} + 400000 \times \frac{3,0}{5,0} \\ 27000 \times \frac{2,0}{5,0} + 35000 \times \frac{3,0}{5,0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88000 \\ 268000 \\ 31800 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

A lâmina homogênea tem espessura $2,0 + 3,0 = 5,0$ mm.

Os módulos de flexão do laminado são computados como descrito no capítulo 2. O projetista precisa conhecer as distâncias dos centros de gravidade de todas as lâminas à superfície média do laminado. Essas distâncias são facilmente calculadas conhecendo as espessuras das lâminas e a sequência de laminação.

Para as duas lâminas de resina, correspondentes ao liner e ao topcoat, essas distâncias são

$$z_1 = 9,3 - \frac{0,30}{2} = 9,15 \text{ mm}$$

Para as duas lâminas grossas e homogêneas essas distâncias são

$$z_2 = 9,3 - 0,30 - \frac{5,0}{2} = 6,50 \text{ mm}$$

Para a lâmina de areia, essa distância é

$z_3 = \text{zero}$

Vamos computar o módulo de flexão circunferencial.

$$E'_y = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^y \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

$$E'_y = \frac{12}{18,6^3} \left[2 \times 30000 \left(\frac{0,3^3}{12} + 0,3 \times 9,15^2 \right) + 2 \times 268000 \left(\frac{5^3}{12} + 5 \times 6,50^2 \right) + 60000 \times \frac{8^3}{12} \right]$$

$$E'_y = 229150 \text{ kg/cm}^2$$

Agora vamos computar o módulo de flexão axial.

$$E'_x = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^x \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

$$E'_x = \frac{12}{18,6^3} \left[2 \times 30000 \left(\frac{0,3^3}{12} + 0,3 \times 9,15^2 \right) + 2 \times 88000 \left(\frac{5^3}{12} + 5 \times 6,50^2 \right) + 60000 \times \frac{8^3}{12} \right]$$

$$E'_x = 80338 \text{ kg/cm}^2$$

A tabela 1 compara as propriedades do laminado hoop-chop com as lâminas separadas em dois grupos distintos ou intercaladas para formar uma lâmina homogênea.

Propriedades	Valores
Espessura	18,6 mm
Módulo axial	74 086 kg/cm ²
Módulo circunferencial	170 860 kg/cm ²
Módulo de flexão axial	80 338 kg/cm ²
Módulo de flexão circunferencial	229 150 kg/cm ²
Módulo de cisalhamento	27 360 kg/cm ²
Relações de Poisson	$\nu_{yx} = 0,30$ e $\nu_{xy} = 0,13$

Tabela 1

Mostra as propriedades do laminado hoop-chop proposto no exemplo 14.

Exemplo 16. Apesar dos melhores esforços do fabricante, ele nunca consegue fazer laminados iguais aos idealizados pelo projetista. O fabricante controla da melhor maneira possível seu processo de fabricação, para obter a menor variação entre seus produtos e o projetado.

O laminado especificado no exemplo 14 foi produzido e o fabricante deseja conhecer seus módulos. Para isso ele queima corpos de prova e determina os teores de fibras, de areia e de resina.

A queima produz os seguintes resultados.

950 g/m² de fibras picadas
 4000 g/m² de fibras UD enroladas com ângulo 90 graus.
 14000 g/m² de areia
 3950 g/m² de fibras UD enroladas com ângulo 90 graus.
 1000 g/m² de fibras picadas

Espessura do laminado $t = 21,0$ mm
 Peso do laminado $P = 38,08$ kg/m²

O laminado produzido não é exatamente igual ao projetado. Nem simétrico ele é, mas será analisado como se fosse, para facilitar os cálculos. O erro cometido fazendo isso não é relevante, porque a assimetria é pequena.

Os teores de fibras, de resina e de areia são facilmente computados

$$(UD) = \frac{4,0 + 3,95}{38,08} = 0,21$$

$$(pic) = \frac{0,95 + 1,00}{38,08} = 0,05$$

$$(areia) = \frac{14,00}{38,08} = 0,37$$

$$(res) = 1,00 - (0,21 + 0,05 + 0,37) = 0,37$$

Os módulos são obtidos usando a expressão

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,12 \\ 1,20 + 1,40(res) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 163000(pic) + 74000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 296000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 26000(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

Onde

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

$$K = 0,37 - \left[\frac{3}{7} \times 0,21 + \frac{7}{3} \times 0,05 + \frac{2}{8} \times 0,37 \right] = 0,07$$

A secura positiva indica que o laminado tem excesso de resina.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,12 \\ 1,20 + 1,40 \times 0,37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 163000 \times 0,05 + 74000 \times 0,21 + 35500 \times 0,37 + 25000 \times 0,07 \\ 163000 \times 0,05 + 296000 \times 0,21 + 35500 \times 0,37 + 25000 \times 0,07 \\ 62900 \times 0,05 + 26000 \times 0,21 + 13600 \times 0,37 + 9610 \times 0,07 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70050 \\ 154720 \\ 26000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

O módulo de tração circunferencial do laminado produzido é 13% menor que o projetado. Esse fato não deve nos assustar, porque o menor valor do módulo é compensado pela maior espessura, 21 mm contra 18,6 mm. O fabricante sabe que está trabalhando com excesso de resina e com certeza vai ajustar seu processo.

Como vemos, calcular os módulos de tração e de cisalhamento de laminados reais é tarefa simples. Difícil é calcular os módulos de flexão. Isso é feito no exemplo que segue.

Exemplo 17. Computar os módulos de flexão do tubo produzido no exemplo anterior.

O laminado foi feito com excesso de resina e suas lâminas têm espessuras maiores que as especificadas pelo projetista. O cálculo dessas espessuras é feito distribuindo o excesso de resina nas diversas lâminas.

Iniciamos calculando o excesso de resina.

As espessuras das lâminas padrão correspondentes às quantidades de fibras e de areia medidas são

$$t_{pic} = \frac{0,950}{0,43} = 2,21 \text{ mm}$$

$$t_{pic} = \frac{1,000}{0,43} = 2,33 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = \frac{4,000}{1,35} = 2,96 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = \frac{3,950}{1,35} = 2,93 \text{ mm}$$

$$t_{areia} = \frac{14,000}{1,69} = 8,28 \text{ mm}$$

A espessura do laminado, se ele fosse feito com lâminas padrão, seria

$$t_{padr\tilde{a}o} = 2,21 + 2,33 + 2,96 + 2,93 + 8,28 + 0,6 = 19,31 \text{ mm}$$

Observe que no cálculo da espessura padrão consideramos $t_r = 0,6 \text{ mm}$ para o liner e o topcoat.

A espessura correspondente ao excesso de resina é obtida subtraindo a espessura padrão calculada acima da espessura medida

$$t_r = 21,00 - 19,31 = 1,69 \text{ mm}$$

Essa espessura adicional de resina está distribuída nas lâminas proporcionalmente às quantidades padrão requeridas por elas. Fazendo essa correção, as espessuras reais das lâminas são:

$$t_{pic} = 2,21 + \frac{0,950 \times \frac{7}{3}}{1,950 \times \frac{7}{3} + 7,950 \times \frac{3}{7} + 14,000 \times \frac{2}{8}} \times 1,69 = 2,54 \text{ mm}$$

$$t_{pic} = 2,33 + \frac{1,00 \times \frac{7}{3}}{1,950 \times \frac{7}{3} + 7,950 \times \frac{3}{7} + 14,000 \times \frac{2}{8}} \times 1,69 = 2,67 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = 2,96 + \frac{4,00 \times \frac{3}{7}}{1,950 \times \frac{7}{3} + 7,950 \times \frac{3}{7} + 14,000 \times \frac{2}{8}} \times 1,69 = 3,21 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = 2,93 + \frac{3,95 \times \frac{3}{7}}{1,950 \times \frac{7}{3} + 7,950 \times \frac{3}{7} + 14,000 \times \frac{2}{8}} \times 1,69 = 3,18 \text{ mm}$$

$$t_{areia} = 8,28 + \frac{14,00 \times \frac{2}{8}}{1,950 \times \frac{7}{3} + 7,950 \times \frac{3}{7} + 14,000 \times \frac{2}{8}} \times 1,69 = 8,80 \text{ mm}$$

A espessura real do laminado é, portanto

$$t = 2,54 + 2,67 + 3,21 + 3,18 + 8,80 + 0,60 = 21,00 \text{ mm}$$

A espessura computada acima é exatamente igual ao valor medido, 21,00 mm, como esperado.

Resumindo, as espessuras reais das lâminas são

- 0,30 mm para o topcoat
- 2,54 mm de fibras picadas
- 3,21 mm de fibras UD enroladas com ângulo 90 graus.
- 8,80 mm de areia
- 3,18 mm de fibras UD enroladas com ângulo 90 graus.
- 2,67 mm de fibras picadas
- 0,30 mm de liner

Espessura real do laminado $t = 21,0 \text{ mm}$.

Essas espessuras podem ser visualizadas na figura 6

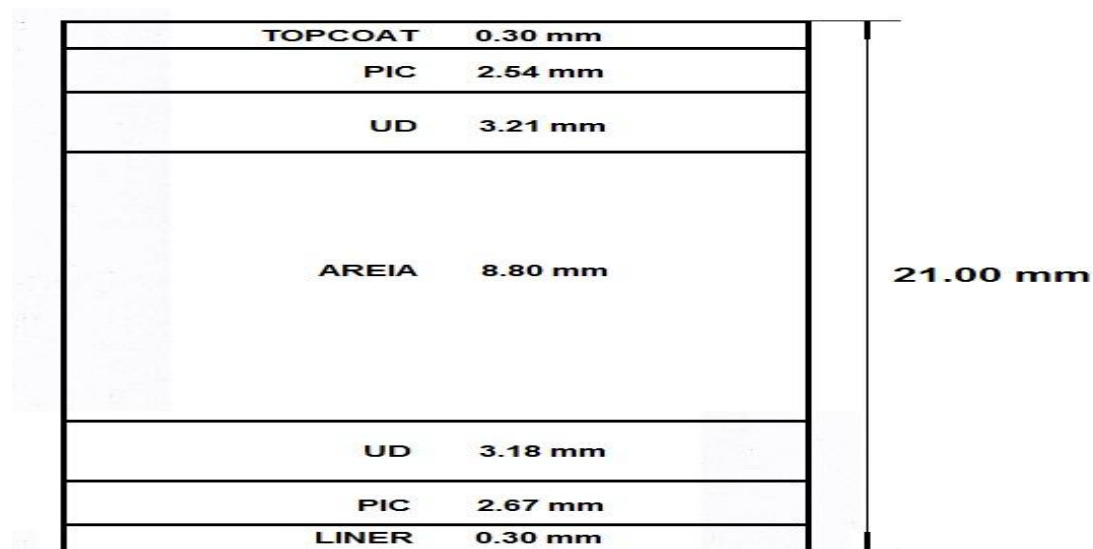


Figura 6
Espessuras das lâminas do laminado real após alocação do excesso de resina.

Os módulos de tração das lâminas com as composições acima na direção y são

$$E_{pic} = \frac{2,21 \times 70000 + (2,54 - 2,21) \times 30000}{2,54} = 64803 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{pic} = \frac{2,33 \times 70000 + (2,67 - 2,33) \times 30000}{2,67} = 64906 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD} = \frac{2,96 \times 400000 + (3,21 - 2,96) \times 30000}{3,21} = 371183 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD} = \frac{2,93 \times 400000 + (3,18 - 2,93) \times 30000}{3,18} = 370911 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{areia} = \frac{8,28 \times 60000 + (8,80 - 8,28) \times 30000}{8,80} = 58227 \text{ kg/cm}^2$$

Vamos intercalar as lâminas UD e picadas para formar uma única lâmina. As espessuras e os módulos de tração circunferencial dessas novas lâminas são

$$E_y = \frac{64803 \times 2,54 + 371183 \times 3,21}{2,54 + 3,21} = 235842 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_y = \frac{64906 \times 2,67 + 370911 \times 3,18}{2,67 + 3,18} = 231250 \text{ kg/cm}^2$$

Em seguida computamos as distâncias dos centros das lâminas à superfície média do laminado. Com essas informações, podemos calcular o módulo de flexão circunferencial.

$$E'_y = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^y \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

$$E'_y = \frac{12}{21^3} \left[2 \times 30000 \left(\frac{0,30^3}{12} + 0,30 \times 10,35^2 \right) + 235842 \left(\frac{5,75^3}{12} + 5,75 \times 7,325^2 \right) \right. \\ \left. + 231250 \left(\frac{5,85^3}{12} + 5,85 \times 7,275^2 \right) + 58227 \times \frac{8,80^3}{12} \right]$$

$$E'_y = 203650 \text{ kg/cm}^2$$

Vamos agora ao cálculo do módulo de flexão axial.

$$E'_x = \frac{12}{t^3} \times \sum E_i^x \times \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i \times z_i^2 \right)$$

Para calcular o módulo de flexão do laminado na direção axial é preciso conhecer os módulos de tração das lâminas nessa direção. As lâminas de fibras picadas e de areia são isotrópicas e seus módulos já foram calculados. Para a lâmina UD, temos

$$E_{UD} = \frac{2,96 \times 100000 + (3,21 - 2,96) \times 30000}{3,21} = 94548 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{UD} = \frac{2,93 \times 100000 + (3,18 - 2,93) \times 30000}{3,18} = 94496 \text{ kg/cm}^2$$

$$E'_x = \frac{12}{21^3} \left[2 \times 30000 \left(\frac{0,30^3}{12} + 0,30 \times 10,35^2 \right) + 81408 \left(\frac{5,75^3}{12} + 5,75 \times 7,325^2 \right) \right. \\ \left. + 80990 \left(\frac{5,85^3}{12} + 5,85 \times 7,275^2 \right) + 58227 \times \frac{8,80^3}{12} \right]$$

$$E'_x = 75245 \text{ kg/cm}^2$$

As propriedades do laminado real estão na tabela 2.

<i>Propriedades</i>	<i>Valores para o laminado real produzido</i>
<i>Espessura</i>	21,0 mm
<i>Módulo axial</i>	70 050 kg/cm ²
<i>Módulo circunferencial</i>	154 720 kg/cm ²
<i>Módulo de flexão axial</i>	75 245 kg/cm ²
<i>Módulo de flexão circunferencial</i>	203 250 kg/cm ²
<i>Módulo de cisalhamento</i>	26 000 kg/cm ²
<i>Relações de Poisson</i>	$\nu_{yx} = 0,30$ e $\nu_{xy} = 0,14$

Tabela 2

Módulos do laminado real produzido conforme a proposta do exemplo 14.

Vemos que os módulos de flexão do laminado real são inferiores aos valores padrão projetados. Esse fato não deve nos preocupar, porque os menores módulos são compensados pela maior espessura.

O cálculo dos módulos de flexão de laminados existentes é muito complicado e nunca é feito na prática. O que se faz na prática é o seguinte:

- Os módulos de flexão são computados supondo laminados virtuais. Os cálculos para laminados virtuais são simples, porque as espessuras das lâminas padrão são arbitradas e seus módulos são conhecidos.
- O projetista acerta seu laminado virtual para atender as exigências de rigidez.
- O fabricante inicia a produção, respeitando as quantidades de fibras e de areia especificadas pelo projetista. A quantidade de resina é geralmente reduzida pelo fabricante.
- Amostras são retiradas da produção para medir a rigidez. A rigidez é fácil de ser medida.
- Se a rigidez medida for menor que a desejada, o fabricante aumenta a quantidade de resina. Se for maior, ele retira resina. O acerto do processo é feito rapidamente, sem computar o módulo de flexão da amostra.
- Portanto, raramente, ou nunca é preciso fazer o cálculo do módulo de flexão de laminados existentes.

Exemplo 18. Computar os módulos de tração do laminado real discutido no exemplo anterior, usando a equação das espessuras.

A equação das espessuras vale para qualquer laminado feito com lâminas de espessuras e módulos conhecidos. Ela não é usada para laminados reais, porque as espessuras das lâminas desses laminados não são conhecidas. Porém, podemos aplicar essa equação para o laminado real discutido no exemplo anterior, porque temos para ele as espessuras e os módulos de todas as lâminas, que calculamos para determinar os módulos de flexão. A tabela 3 mostra essas lâminas com suas espessuras e módulos.

<i>Lâmina</i>	<i>Módulo de tração (kg/cm²)</i>	<i>Espessura (mm)</i>
<i>Resina</i>	<i>30000</i>	<i>0,30</i>
<i>Picadas + UD circunferencial</i>	<i>235844</i>	<i>5,75</i>
<i>Picadas + UD axial</i>	<i>81320</i>	<i>5,75</i>
<i>Areia</i>	<i>58277</i>	<i>8,80</i>
<i>Picadas + UD axial</i>	<i>80990</i>	<i>5,85</i>
<i>Picadas + UD circunferencial</i>	<i>231247</i>	<i>5,85</i>
<i>Resina</i>	<i>30000</i>	<i>0,30</i>

Tabela 3

Mostra as espessuras e os módulos das lâminas reais do laminado produzido com as especificações do exemplo 14

O procedimento para calcular os módulos usando a equação das espessuras é simples e direto. Vamos demonstrar isso para os módulos axial e circunferencial.

$$E_x = 81320 \times \frac{5,75}{21} + 80990 \times \frac{5,85}{21} + 58277 \times \frac{8,80}{21} + 30000 \times \frac{0,6}{21}$$

$$E_x = 70\,106 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_y = 235844 \times \frac{5,75}{21} + 231247 \times \frac{5,85}{21} + 58277 \times \frac{8,80}{21} + 30000 \times \frac{0,6}{21}$$

$$E_y = 154\,273 \text{ kg/cm}^2$$

Esses são os mesmos valores calculados antes, usando a equação dos teores. Como vemos, todas as fórmulas dão os mesmos resultados. A concordância é perfeita.

Apêndice 1

Laminados quase-isotrópicos

Muitas vezes os projetistas encontram estruturas simétricas submetidas a esforços também simétricos. Nessas condições, as estruturas são igualmente solicitadas em todas direções, e devem ser feitas preferencialmente com laminados isotrópicos. Porém, os únicos laminados isotrópicos conhecidos são os feitos com fibras picadas, que têm módulo muito baixo, $E = 70\ 000\text{ kg/cm}^2$.

Os fundos toro-esféricos de tanques verticais são exemplos de estruturas simétricas sob esforços de tração também simétricos. Esses fundos suportam grandes pressões hidrostáticas e, se feitos com fibras picadas, podem ter grandes espessuras. O uso de tecidos T800 e de lâminas UD nesses casos apresenta um desafio interessante, porque o módulo de tração dessas lâminas varia com a direção das fibras e o projetista fica sem saber que valor usar.

Esse problema pode ser resolvido com os laminados quase-isotrópicos.

Os laminados quase-isotrópicos são feitos com grupos de 4 lâminas UD defasadas 45 graus umas das outras. Esta defasagem de 45 graus dá aos grupos o mesmo módulo de tração em qualquer direção. Quando a laminação é feita dessa maneira, apenas o módulo de tração é igual em todas as direções. A resistência varia com a direção e é por isso que esses laminados são conhecidos como “quase” isotrópicos.

Pode ser demonstrado que a combinação de quatro lâminas UD defasadas em 45 graus, com ângulos 0, 45, 90 e 135 graus, produzem laminados quase-isotrópicos com módulo

$$E = \frac{E_1 + E_2 + 2 \times E_{45}}{4}$$

Onde

E é o módulo de tração do laminado quase-isotópico, igual em todas direções

E₁ = 400 000 kg/cm² é o módulo da lâmina UD na direção das fibras

E₂ = 100 000 kg/cm² é o módulo da lâmina UD na direção transversal às fibras

E₄₅ = 132 000 kg/cm² é o módulo da lâmina UD na direção 45 graus.

Substituindo esses valores na equação acima, obtemos

$$E = \frac{400\ 000 + 100\ 000 + 2 \times 132\ 000}{4} = 191\ 000\text{ kg/cm}^2$$

Esse é o módulo quase-isotrópico, obtido combinando 4 lâminas UD defasadas em 45 graus. Esse módulo de tração é igual em todas as direções e vale para grupos de 4 lâminas UD padrão defasadas como indicado.

Muitas vezes os fabricantes preferem usar 2 tecidos T800 em lugar de 4 lâminas UD. Nesses casos temos três considerações a fazer:

- *As lâminas de tecido T800 podem ser modeladas como duas lâminas UD de espessuras 0,32 mm e 0,26 mm, perpendiculares uma à outra. Portanto, ao laminar 2 tecidos T800 defasados em 45 graus, estamos construindo um laminado com 4 lâminas UD também defasadas em 45 graus.*
- *A espessura padrão de cada lâmina de tecido T800 é 0,85 mm, dos quais 0,58 mm correspondem às duas lâminas UD e $0,85 - 0,58 = 0,27$ mm correspondem ao excesso de resina.*
- *Os tecidos T800 não são equilibrados, porque são modelados com duas lâminas UD de espessuras diferentes, mas... é o que temos.*

Portanto, ignorando o desequilíbrio dos tecidos T800 e corrigindo para a espessura, o módulo quase-isotrópico de duas lâminas T800 defasadas em 45 graus é

$$E = \frac{191000 \times 0,58 + 30000 \times (0,85 - 0,58)}{0,85} = 140\ 000 \text{ kg/cm}^2$$

Esse é o módulo quase-isotópico de duas lâminas de tecido T800 defasadas em 45 graus.

Geralmente os tecidos T800 são usados em pares com mantas M450. O módulo quase-isotrópico do par MT é

$$E = \frac{70\ 000 \times 1,05 + 140\ 000 \times 0,85}{1,90} \cong 100\ 000 \text{ kg/cm}^2$$

Esse valor deve ser comparado com $E = 70\ 000 \text{ kg/cm}^2$ para laminados feitos com lâminas de fibras picadas.

Nas aplicações práticas as lâminas UD são feitas com tecidos TUD 1200, que têm as propriedades seguintes:

$E_1 = 280\ 000 \text{ kg/cm}^2$ é o módulo da lâmina TUD 1200 na direção das fibras
 $E_2 = 75\ 000 \text{ kg/cm}^2$ é o módulo da lâmina TUD 1200 na direção transversal às fibras
 $E_{45} = 110\ 000 \text{ kg/cm}^2$ é o módulo da lâmina TUD 1200 na direção 45 graus.
 Espessura 1,25 mm/lâmina

Substituindo esses valores na equação para o cálculo do módulo, obtemos

$$E = \frac{280\ 000 + 75\ 000 + 2 \times 110\ 000}{4} = 143\ 000 \cong 140\ 000 \text{ kg/cm}^2$$

Esse é o módulo quase-isotrópico obtido com 4 lâminas TUD 1200 defasadas em 45 graus. A espessura dessas 4 lâminas é 5,0 mm. Esse módulo de tração é igual em todas as direções e vale para grupos de 4 lâminas TUD 1200 defasadas como indicado.

Esses valores estão na tabela 4

	TUD 1200	T800	Pares TM
Espessura	1,25 mm/lâmina	0,85 mm/lâmina	1,9 mm/par
E (kg/cm ²)	140 000	140 000	100 000

Tabela 4
Módulos quase-isotrópicos

Exemplo 19 – Computar o erro cometido ao construir laminados quase-isotrópicos defasando 2 tecidos T800 em lugar de 4 lâminas UD.

Os módulos obtidos com 2 tecidos T800 defasados de 45 graus são

$$E = \frac{400000 \times 0,32 + 100000 \times 0,26 + 132000 \times 0,32 + 132000 \times 0,26}{1,16} = 198750 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = \frac{400000 \times 0,26 + 100000 \times 0,32 + 132000 \times 0,32 + 132000 \times 0,26}{1,16} = 183250 \text{ kg/cm}^2$$

O módulo obtido defasando 4 lâminas UD é $E = 191000 \text{ kg/cm}^2$ em todas as direções. Comparados com elas, os 2 tecidos T800 têm módulos ligeiramente maiores em uma direção e ligeiramente menores em outra. As diferenças são pequenas, permitindo a defasagem de 2 tecidos T800 em lugar de 4 lâminas UD. Na prática é isso que se faz. A maioria dos laminados quase-isotrópicos é feita com 2 tecidos T800 defasados em 45 graus.

Capítulo 4

Lei das misturas unidimensional

Coefficientes de dilatação

1 – Introdução. Este capítulo discute os protocolos para computar os coeficientes de dilatação térmica e hídrica de laminados usando a lei das misturas unidimensional. Os protocolos são similares aos usados para calcular os módulos e as relações de Poisson.

2 – Coeficientes de dilatação. As lâminas embutidas em laminados são perfeitamente coladas umas nas outras, sendo forçadas a deformar de maneira solidária. O protocolo de cálculo da lei das misturas unidimensional ignora essa interação, dando resultados imprecisos para os coeficientes de dilatação de laminados cruzados. O erro incorrido é pequeno e perfeitamente aceitável para laminados sem lâminas cruzadas. Mas, na presença de lâminas UD55 ou UD70, que distorcem ao dilatar, esse erro pode ser apreciável. O cálculo preciso dos coeficientes de dilatação de laminados com lâminas UD55 ou UD70 deve ser feito usando matrizes, como mostrado no capítulo seguinte.

A lei das misturas unidimensional não leva em conta a interação entre as lâminas. As seções que seguem ilustram os protocolos de cálculo dos coeficientes de dilatação usando essa lei. Esses protocolos usam o conceito de lâminas padrão, da mesma maneira que fizemos para computar os módulos e as relações de Poisson no capítulo anterior.

3 – Equação das espessuras. Essa equação computa os coeficientes de dilatação de laminados virtuais, ainda em fase de projeto.

Para os coeficientes de dilatação térmica, temos

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{pic} \times \alpha_{pic} \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times t_{UD} + E_{tec}^x \times \alpha_{tec}^x \times t_{tec} + E_{areia} \times \alpha_{areia} \times t_{areia} + E_r \times \alpha_r \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{E_{pic} \times \alpha_{pic} \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times t_{UD} + E_{tec}^y \times \alpha_{tec}^y \times t_{tec} + E_{areia} \times \alpha_{areia} \times t_{areia} + E_r \times \alpha_r \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

Na equação acima o parâmetro α representa os coeficientes de dilatação térmica das lâminas padrão e do laminado. Os módulos e os coeficientes de dilatação das lâminas são conhecidos. As espessuras das lâminas são arbitradas pelo projetista. Entrando os valores conhecidos na equação acima, e lembrando que os laminados com fibras UD nunca tem tecidos, obtemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times t_{UD} + 0,78 \times t_{areia} + 1,80 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times t_{UD} + 0,78 \times t_{areia} + 1,80 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação hídrica são computados de maneira semelhante

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13300 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times t_{UD} + 9000 \times t_{areia} + 12000 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{13300 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times t_{UD} + 9000 \times t_{areia} + 12000 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

As equações acima excluem as lâminas de tecido, que nunca são usadas em laminados que contém fibras UD. Os tecidos são sempre usados com mantas de fibras picadas, formando os chamados pares MT.

Os coeficientes de dilatação dos laminados MT são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{tec}^x \times \alpha_{tec}^x \times t_{tec} + 1,80 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{tec}^y \times \alpha_{tec}^y \times t_{tec} + 1,80 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13000 \times t_{pic} + E_{tec}^x \times \beta_{tec}^x \times t_{tec} + 12000 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{13000 \times t_{pic} + E_{tec}^y \times \beta_{tec}^y \times t_{tec} + 12000 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

As expressões para laminados MT são usadas com igual facilidade para laminados virtuais ou reais. Para os virtuais, em fase de projeto, a espessura da lâmina de resina é arbitrada em $t_r = 0,6$ mm. Para os laminados reais, a espessura da lâmina de resina é computada pela expressão

$$t_r = t - 1,05 \times M - 0,85 \times T$$

Onde T é o número de lâminas de tecido, M é o número de lâminas de manta M450 e t é a espessura total do laminado.

4. Equação dos teores. Essa equação é usada para laminados reais, existentes, para os quais os módulos, as espessuras e os coeficientes de dilatação das lâminas são desconhecidos.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \left[\frac{4,08 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times (UD) + 0,46 \times (areia) + 1,50 \times K}{E_x} \right]}{\frac{4,08 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times (UD) + 0,46 \times (areia) + 1,50 \times K}{E_y}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,12 \\ 1,20 + 1,40(res) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{31000 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times (UD) + 5300 \times (areia) + 10000 \times K}{E_x} \\ \frac{31000 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times (UD) + 5300 \times (areia) + 10000 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

Onde K é a secura do laminado

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right]$$

A equação dos teores foi deduzida para módulos expressos em kg/cm², coeficientes de dilatação térmica em 1/C e coeficientes de dilatação hídrica em 1/g.

Essas são as equações usadas para calcular os coeficientes de dilatação térmica e hídrica de laminados. Elas são baseadas na lei das misturas unidimensional e não dão resultados exatos. Os módulos e os coeficientes de dilatação térmica exatos são computados usando a lei das misturas matricial.

Exemplo 1. A queima de corpos de prova extraídos de um laminado revelou construção com M = 8 mantas M450 e T = 7 tecidos T800. A espessura medida do laminado é t = 12,35 mm. Computar os coeficientes de dilatação térmica e hídrica desse laminado.

São dados

$$t = 12,35 \text{ mm}$$

$$t_r = 12,35 - 8 \times 1,05 - 7 \times 0,85 = -2,0 \text{ mm (Laminado seco, com } t_r \text{ negativo)}$$

$$t_{pic} = 8 \times 1,05 = 8,40 \text{ mm}$$

$$t_{tec} = 7 \times 0,85 = 5,95 \text{ mm}$$

$$E_{tec}^x = 170\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{tec}^y = 190\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha_{tec}^x = 21 \times 10^{-6} / C$$

$$\alpha_{tec}^y = 17 \times 10^{-6} / C$$

$$\beta_{tec}^x = 0,09$$

$$\beta_{tec}^y = 0,08$$

Os módulos e os coeficientes de dilatação térmica das lâminas de resina e de fibras picadas já estão embutidos nas fórmulas. Para calcular os coeficientes de dilatação é preciso conhecer os módulos do laminado. Vamos calcular os módulos usando a equação da espessura apresentada nos capítulos anteriores.

$$E_x = \frac{8,40 \times 70000 + 5,95 \times 170000 - 2,0 \times 30000}{12,35} = 124650 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_y = \frac{8,40 \times 70000 + 5,95 \times 190000 - 2,0 \times 30000}{12,35} = 134300 \text{ kg/cm}^2$$

Conhecidos os módulos, podemos calcular os coeficientes de dilatação.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times 8,40 + 170000 \times 21 \times 10^{-6} \times 5,95 - 1,80 \times 2,0}{124650 \times 12,35} \\ \frac{1,75 \times 8,40 + 190000 \times 17 \times 10^{-6} \times 5,95 - 1,80 \times 2,0}{134300 \times 12,35} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,0 \times 10^{-6}/C \\ 18,3 \times 10^{-6}/C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13000 \times t_{pic} + E_{tec}^x \times \beta_{tec}^x \times t_{tec} + 12000 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{13000 \times t_{pic} + E_{tec}^y \times \beta_{tec}^y \times t_{tec} + 12000 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13000 \times 8,40 + 170000 \times 0,09 \times 5,95 - 12000 \times 2,0}{124650 \times 12,35} \\ \frac{13000 \times 8,40 + 190000 \times 0,08 \times 5,95 - 12000 \times 2,0}{134300 \times 12,35} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

Como vemos, o protocolo de cálculo é muito simples.

Exemplo 2. Calcular os coeficientes de dilatação de uma tubulação UD55 em fase de projeto. A construção seguinte foi arbitrada pelo projetista:

$$t_{pic} = 2,0 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = 8,0 \text{ mm}$$

$$t_r = 0,6 \text{ mm}$$

$$t = 2,0 + 8,0 + 0,6 = 10,6 \text{ mm}$$

Os módulos de elasticidade e as relações de Poisson do laminado são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 96300 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 70000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 170800 \times \frac{t_{UD}}{t} + 30000 \times \frac{t_r}{t} \\ 27000 \times \frac{t_{pic}}{t} + 101200 \times \frac{t_{UD}}{t} + 11500 \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{2,0}{10,6} + 96300 \times \frac{8,0}{10,6} + 30000 \times \frac{0,6}{10,6} \\ 70000 \times \frac{2,0}{10,6} + 170800 \times \frac{8,0}{10,6} + 30000 \times \frac{0,6}{10,6} \\ 27000 \times \frac{2,0}{10,6} + 101200 \times \frac{8,0}{10,6} + 11500 \times \frac{0,6}{10,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87585 \\ 143810 \\ 82122 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{yx} = v_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + v_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + v_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{2}{10,6} + 0,70 \times \frac{8}{10,6} + 0,30 \times \frac{0,6}{10,6} = 0,55$$

$$v_{xy} = 0,55 \times \frac{87585}{143810} = 0,33$$

Os coeficientes de dilatação térmica são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times t_{UD} + 1,80 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times t_{UD} + 1,80 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times 2 + 96300 \times 32,6 \times 10^{-6} \times 8 + 1,80 \times 0,6}{87585 \times 10,6} \\ \frac{1,75 \times 2 + 170800 \times 19,9 \times 10^{-6} \times 8 + 1,80 \times 0,6}{143810 \times 10,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,0 \times 10^{-6} / C \\ 20,8 \times 10^{-6} / C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17500 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times t_{UD} + 12000 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{17500 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times t_{UD} + 12000 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17500 \times 2 + 96300 \times 0,18 \times 8 + 12000 \times 0,6}{87585 \times 10,6} \\ \frac{17500 \times 2 + 170800 \times 0,11 \times 8 + 12000 \times 0,6}{143810 \times 10,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,13 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. Calcular os coeficientes de dilatação de um laminado UD70 real cuja queima produziu as informações seguintes.

$$t = 9,7 \text{ mm}$$

$$Peso = 16,66 \text{ kg/m}^2$$

$$Q_{UD} = 10,81 \text{ kg/m}^2$$

$$Q_{pic} = 0,90 \text{ kg/m}^2$$

$$Q_{res} = 16,66 - 10,81 - 0,90 = 4,95 \text{ kg/m}^2$$

Os teores de fibras e de resina são.

$$(UD) = \frac{10,81}{16,66} = 0,65$$

$$(pic) = \frac{0,90}{16,66} = 0,05$$

$$(res) = 1,00 - 0,65 - 0,05 = 0,30$$

Os módulos de elasticidade são computados usando a equação dos teores

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 25000 \times K \\ 63000(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] [0,70 \times (pic) + 0,74 \times v_{UD}^{yx} \times (UD) + 0,25 \times K]$$

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) \right]$$

$$K = (0,30) - \left[\frac{3}{7}(0,65) + \frac{7}{3}(0,05) \right]$$

$$K = -0,10 \quad (\text{Secura negativa. O laminado tem menos resina que o padrão})$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times 0,30} \right] \begin{bmatrix} 163000 \times 0,05 + 0,74 \times 92800 \times 0,65 - 25000 \times 0,10 \\ 163000 \times 0,05 + 0,74 \times 298200 \times 0,65 - 25000 \times 0,10 \\ 63000 \times (0,05) + 0,74 \times 66000 \times (0,65) - 9610 \times 0,10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96850 \\ 287120 \\ 65350 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson são

$$v_{yx} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times 0,30} \right] [0,70 \times 0,05 + 0,74 \times 0,70 \times 0,65 - 0,25 \times 0,1]$$

$$v_{yx} = 0,67$$

$$v_{xy} = 0,67 \times \frac{96850}{287120} = 0,23$$

Os coeficientes de dilatação térmica são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} \frac{4,08 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times (UD) + 1,50 \times K}{E_x} \\ \frac{4,08 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times (UD) + 1,50 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,30)} \right] \begin{bmatrix} \frac{4,08 \times 0,05 + 0,74 \times 40,6 \times 10^{-6} \times 92800 \times 0,65 - 1,50 \times 0,1}{96850} \\ \frac{4,08 \times 0,05 + 0,74 \times 298200 \times 11,8 \times 10^{-6} \times 0,65 - 1,50 \times 0,1}{287120} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,1 \times 10^{-6}/C \\ 11,7 \times 10^{-6}/C \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação hídrica são

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} \frac{31000 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times (UD) + 10000 \times K}{E_x} \\ \frac{31000 \times (pic) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times (UD) + 10000 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,30)} \right] \begin{bmatrix} \frac{31000 \times (0,05) + 0,74 \times 92800 \times 0,12 \times (0,65) - 10000 \times 0,1}{96850} \\ \frac{31000 \times (0,05) + 0,74 \times 298200 \times 0,09 \times (0,65) - 10000 \times 0,1}{287120} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,09 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. Computar os coeficientes de dilatação de um laminado hoop-chop cuja queima revelou a seguinte composição.

$$(pic) = 0,10$$

$$(areia) = 0,30$$

$$(UD) = 0,20$$

$$(res) = 0,40$$

A secura do laminado é

$$K = (0,40) - \left[\frac{3}{7}(0,20) + \frac{7}{3}(0,10) + \frac{2}{8}(0,30) \right] = 0,01$$

O laminado tem um ligeiro, quase imperceptível, excesso de resina.

Os módulos do laminado são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 74000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 296000(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 62900(pic) + 26000(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,40)} \right] \begin{bmatrix} 163000(0,10) + 74000(0,20) + 35500(0,30) + 25000 \times 0,01 \\ 163000(0,10) + 296000(0,20) + 35500(0,30) + 25000 \times 0,01 \\ 62900(0,10) + 26000(0,20) + 13600(0,30) + 9610 \times 0,01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74340 \\ 153160 \\ 28045 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Os coeficientes de dilatação térmica são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(\text{res})} \right] \begin{bmatrix} \frac{4,08 \times (\text{pic}) + 3,33 \times (UD) + 0,46 \times (\text{areia}) + 1,50 \times K}{E_x} \\ \frac{4,08 \times (\text{pic}) + 2,22 \times (UD) + 0,46 \times (\text{areia}) + 1,50 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,40)} \right] \begin{bmatrix} \frac{4,08 \times (0,10) + 3,33 \times (0,20) + 0,46 \times (0,30) + 1,50 \times 0,01}{74340} \\ \frac{4,08 \times (0,10) + 2,22 \times (0,20) + 0,46 \times (0,30) + 1,50 \times 0,01}{153160} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,3 \times 10^{-6}/C \\ 11,6 \times 10^{-6}/C \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação hídrica são

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(\text{res})} \right] \begin{bmatrix} \frac{31000 \times (\text{pic}) + 0,74 \times E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times (UD) + 5300(\text{areia}) + 10000 \times K}{E_x} \\ \frac{31000 \times (\text{pic}) + 0,74 \times E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times (UD) + 5300(\text{areia}) + 10000 \times K}{E_y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(0,40)} \right] \begin{bmatrix} \frac{31000 \times (0,10) + 0,74 \times 100000 \times 0,12 \times (0,20) + 5300(0,30) + 10000 \times 0,1}{74340} \\ \frac{31000 \times (0,10) + 0,74 \times 400000 \times 0,09 \times (0,20) + 5300(0,30) + 10000 \times 0,1}{153160} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,13 \end{bmatrix}$$

Capítulo 5

Resistências

1 – Introdução. Este capítulo discute os protocolos para computar as resistências de laminados comerciais. Os protocolos são similares aos usados para calcular os módulos, as relações de Poisson e os coeficientes de dilatação. Talvez a única novidade introduzida neste capítulo seja a definição de múltiplas resistências para os laminados de compósitos, uma para cada modo de falha.

Para falhas com pequenas deformações, abaixo do limite de proporcionalidade, a validade da lei de Hooke indica que a resistência dos laminados pode ser expressa como tensão ou como alongamento. Porém, a grande diversidade de laminados, cada um com sua construção e seu módulo de elasticidade, inutiliza o conceito de tensão, forçando a definição da resistência como alongamento. A resistência definida como alongamento depende unicamente da lâmina crítica, qualquer que seja a construção do laminado.

Por outro lado, se expressa como tensão, essa mesma resistência varia com o módulo e a construção do laminado. Portanto, para facilitar as coisas, a resistência deve ser expressa como alongamento, e nunca como tensão. Mesmo assim, sabendo disso, a maioria dos textos sobre compósitos cita as resistências em termos de tensões médias. Essa abordagem deve ser evitada porque, embora correta, ela é inadequada, complexa e confusa.

2 – Resistências de laminados comerciais. Os laminados têm quatro resistências, correspondentes aos quatro modos de falha atualmente reconhecidos. São elas:

- *Resistência à infiltração é o alongamento correspondente ao umbral de infiltração.*
- *Resistência à exudação é o alongamento correspondente ao umbral de exudação.*
- *Resistência à rigidez é o alongamento correspondente ao umbral de rigidez.*
- *Resistência à ruptura é o correspondente ao umbral de ruptura.*

A literatura sobre os compósitos reconhece como resistência apenas o alongamento de ruptura, aquele que rompe o laminado. Mas, assim como o aço tem duas resistências – escoamento e ruptura – os compósitos têm as quatro resistências citadas acima.

Os alongamentos que caracterizam as resistências dos laminados são idênticos aos umbrais de falha das lâminas críticas. Aliás, os umbrais de falha são definidos como resistências das lâminas. Os quatro umbrais de falha, ou resistências, das lâminas comerciais foram definidos e tabelados no capítulo 1. As lâminas têm quatro umbrais, ou resistências, um para cada modo de falha.

Mas, como dissemos, muitos especialistas insistem em definir as resistências como tensões. A conversão de alongamentos em tensões é feita usando a lei de Hooke.

$$\begin{bmatrix} \text{resistência} \\ \text{como} \\ \text{tensão} \end{bmatrix} = E \times \begin{bmatrix} \text{resistência} \\ \text{como} \\ \text{alongamento} \end{bmatrix}$$

Onde E é o módulo de tração do laminado. As resistências expressas como tensões são computadas multiplicando os módulos de elasticidade, calculados nos capítulos 2 e 3 deste livro, pelos umbrais de falha expressos como alongamentos. Representando as resistências expressas em tensões pela letra S e os umbrais expressos em alongamentos pela letra T, a equação acima pode ser expandida para

$$S_i = E \times T_i \quad \text{Resistência à infiltração expressa como tensão}$$

$$S_w = E \times T_w \quad \text{Resistência à exudação expressa como tensão}$$

$$S_s = E \times T_s \quad \text{Resistência à rigidez expressa como tensão}$$

A resistência à ruptura não pode ser computada pela lei de Hooke, porque a ruptura dos laminados ocorre em grandes deformações, acima do limite de proporcionalidade. Os compósitos nunca devem ser analisados com base em suas resistências à ruptura.

Definido o conceito de resistência, vamos discutir os alongamentos, ou tensões, admissíveis. Esses alongamentos, ou tensões, são arbitrados pelo projetista ou definidos em normas. Existem quatro alongamentos (e tensões) admissíveis para os compósitos, um para cada modo de falha.

Para assegurar o entendimento, vamos repetir com outras palavras o que acabamos de dizer. As resistências dos laminados devem ser preferencialmente expressas em alongamentos e não em tensões. A justificativa para isso é simples. Os alongamentos de falha são propriedades bem definidas das lâminas críticas, independentes da construção do laminado. As tensões de falha, ao contrário, variam com a construção do laminado. Por isso, as resistências devem ser expressas em alongamentos, que valem para qualquer laminado, e não em tensões, que variam com o laminado. As resistências são definidas pelos umbrais de falha das lâminas críticas, isto é, daquelas que determinam a falha. Por exemplo:

- *A resistência de laminados em ambientes agressivos é determinada pelo umbral de infiltração das lâminas de fibras picadas.*
- *A resistência de laminados em ambientes não agressivos, como água ou esgoto urbano, é determinada pelo umbral de exudação da lâmina crítica, que pode ser a de fibras picadas (tubos usados em saneamento) ou a UD55 (tubos para altas pressões).*

- Para aplicações em ambientes secos, como pás eólicas, peças automobilísticas ou aeronáuticas, a resistência é determinada pelo umbral de rigidez da lâmina crítica.

Portanto, os umbrais da falha das lâminas críticas determinam as resistências dos laminados. A lâmina de fibras picadas é crítica para serviços em ambientes líquidos, agressivos ou não. A lâmina UD é crítica em aplicações secas, como pás eólicas. Os laminados falham quando as lâminas críticas atingem os umbrais de falha, que podem ser de infiltração, de exudação, ou de rigidez. O umbral de ruptura é inútil para fazer cálculos de engenharia, sendo citado aqui apenas em deferência ao seu papel histórico.

Os umbrais de infiltração e de exudação das lâminas de fibras picadas estão listados no capítulo 1 para diversas resinas. Esses umbrais definem as resistências de infiltração e de exudação para laminados cuja lâmina crítica é a de fibras picadas. A tabela 1 mostra os alongamentos admissíveis para lâminas de fibras picadas, computados dividindo os umbrais de falha (v. capítulo 1) pelo coeficiente de segurança $CS = 2,0$.

<i>Alongamentos admissíveis para lâminas de fibras picadas (%)</i>				
<i>Modo de falha</i>	<i>Resina bisfenólica</i>	<i>Resina poliéster</i>	<i>Derakane 411</i>	<i>Derakane 470</i>
<i>Infiltração</i>	0,10	----	0,25	0,18
<i>Exudação</i>	----	0,40	0,55	0,40
<i>Rigidez</i>	----	----	----	----
<i>Ruptura</i>	----	----	----	----

Tabela 1

Alongamentos admissíveis para lâminas de fibras picadas. Essas lâminas são críticas para serviços em ambientes corrosivos ou para o transporte de fluidos. Os alongamentos admissíveis acima foram obtidos dividindo por 2 os umbrais de falha.

Exemplo 1. *Supor uma tubulação construída com resina vinil éster Derakane 411. Os módulos de tração do laminado são $E_x = 80\ 000\ \text{kg/cm}^2$ e $E_y = 120\ 000\ \text{kg/cm}^2$. Computar as resistências dessa tubulação supondo barreira crítica de fibras picadas.*

Resistência axial à infiltração

- *Em termos de alongamento* $T_i = 0,50\%$
- *Em termos de tensão:* $S_i = 80000 \times 0,005 = 400\ \text{kg/cm}^2$

Resistência axial à exudação

- *Em termos de alongamento:* $T_w = 1,1\%$
- *Em termos de tensão:* $S_w = 80000 \times 0,011 = 880\ \text{kg/cm}^2$

Resistência circunferencial à infiltração

- *Em termos de alongamento:* $T_i = 0,50\%$
- *Em termos de tensão:* $S_i = 120000 \times 0,005 = 600\ \text{kg/cm}^2$

Resistência circunferencial à exudação

- Em termos de alongamento: $T_w = 1,10\%$
- Em termos de tensão: $S_w = 120000 \times 0,011 = 1300 \text{ kg/cm}^2$

Esses valores são agrupados na tabela 2.

Modo de falha	Resistência como alongamento	Resistência como tensão
Infiltração axial	0,50%	400 kg/cm ²
Infiltração circunferencial	0,50%	600 kg/cm ²
Exudação axial	1,10%	880 kg/cm ²
Exudação circunferencial	1,10%	1300 kg/cm ²

Tabela 2

Resistências expressas como tensões e como alongamentos. Observe como a resistência expressa em tensões depende do módulo do laminado.

Como vemos, as resistências expressas como tensões dependem do módulo do laminado. As resistências devem ser expressas como alongamentos, e não como tensões.

Exemplo 2. Computar os alongamentos e as tensões admissíveis para o tubo discutido acima. Os alongamentos e tensões admissíveis são obtidos dividindo as resistências por $CS = 2,0$.

Tensão ou alongamento axial admissível para infiltração

- Em termos de alongamento: $0,50/2,0 = 0,25\%$
- Em termos de tensão: $80000 \times 0,005/2 = 200 \text{ kg/cm}^2$

Tensão ou alongamento axial admissível para exudação

- Em termos de alongamento: $1,10/2,0 = 0,55\%$
- Em termos de tensão: $80000 \times 0,011/2 = 440 \text{ kg/cm}^2$

Tensão ou alongamento circunferencial admissível para infiltração

- Em termos de alongamento: $0,50/2,0 = 0,25\%$
- Em termos de tensão: $120000 \times 0,005/2,0 = 300 \text{ kg/cm}^2$

Tensão ou alongamento circunferencial admissível para exudação

- Em termos de alongamento: $1,10/2,0 = 0,55\%$
- Em termos de tensão: $120000 \times 0,011/2,0 = 660 \text{ kg/cm}^2$

A tabela 3 repete esses resultados.

Modos de falha	Alongamentos admissíveis	Tensões admissíveis
Infiltração axial	$0,50/2,0 = 0,25\%$	$400/2,0 = 200 \text{ kg/cm}^2$
Infiltração circunferencial	$0,50/2,0 = 0,25\%$	$600/2,0 = 300 \text{ kg/cm}^2$
Exudação axial	$1,10/2,0 = 0,55\%$	$880/2,0 = 440 \text{ kg/cm}^2$
Exudação circunferencial	$1,10/2,0 = 0,55\%$	$1300/2,0 = 660 \text{ kg/cm}^2$

Tabela 3

Os alongamentos admissíveis são obtidos dividindo as resistências por 2.

Os projetistas definem os laminados com base nos alongamentos admissíveis. Primeiro eles arbitram uma construção para ele. Em seguida eles calculam seus módulos e relações de Poisson. Os esforços externos são conhecidos. Os alongamentos são então computados, devendo ser inferiores aos admissíveis citados na tabela 3. Se isso não acontecer, o projetista faz nova tentativa com outro laminado.

3 – Resistências ao cisalhamento. Considerações de equilíbrio indicam que as tensões de cisalhamento têm valores iguais nas direções perpendicular e paralela às lâminas. Porém, apesar da igualdade das tensões, as resistências ao cisalhamento têm valores muito diferentes nessas direções. Isso se deve ao fato de que a resistência na direção perpendicular às lâminas é controlada pelas fibras, enquanto que na direção paralela ela é dominada pela resina.

As versões mais recentes da norma ASME RTP1 cita o valor $\tau = 140 \text{ kg/cm}^2$ para a resistência ao cisalhamento paralelo às lâminas, sem mencionar a resina. Essa resistência é fundamental para o dimensionamento da largura de uniões laminadas e para a fixação de acessórios a laminados de compósitos.

As resistências perpendiculares às lâminas não são citadas pela ASME RTP1 ou pela ASME X. Os valores que tenho usado em meus cálculos são apresentadas na tabela 4.

<i>Lâmina</i>	<i>Resistência paralela às lâminas (kg/cm²)</i>	<i>Resistência perpendicular às lâminas (kg/cm²)</i>
<i>Resina</i>	<i>140</i>	<i>140</i>
<i>Fibras picadas</i>	<i>140</i>	<i>800</i>
<i>Fibras tecidas ou UD</i>	<i>140</i>	<i>1200</i>

Tabela 4

Resistências ao cisalhamento de lâminas

4 – Resistência ao descascamento. A resistência ao descascamento (peel strength) é uma propriedade dos materiais derivada diretamente da falha tipo I estudada em mecânica de fraturas. Essa resistência é fundamental no projeto e na análise da fixação de acessórios em tanques e tubos de compósitos. A única referência que conheço sobre essa resistência é citada na ASME RTP1, que menciona o valor $Q = 90 \text{ kg/cm}$ (500 lb/in). Esse é o valor que tenho usado em meus cálculos

Capítulo 6

Lei das misturas matricial

Matrizes de lâminas padrão

1 – Introdução – Os capítulos precedentes discutiram o uso da lei das misturas unidimensional para calcular as propriedades elásticas e os coeficientes de dilatação de laminados. Este capítulo e os que seguem faz a mesma coisa, usando a lei das misturas bidimensional, ou matricial. A lei das misturas unidimensional é fácil de usar e dá excelentes resultados, mas a matricial é mais precisa.

Vamos iniciar a discussão apresentando as matrizes das lâminas, que posteriormente serão usadas para montar as matrizes dos laminados. O capítulo termina apresentando o protocolo exato para calcular as propriedades elásticas e os coeficientes de dilatação de laminados.

A análise completa de laminados requer o conhecimento de doze propriedades das 5 lâminas fundamentais. Essas propriedades foram discutidas no capítulo 1.

1. Quatro constantes de engenharia
2. Quatro alongamentos de falha
3. Dois coeficientes de dilatação térmica
4. Dois coeficientes de dilatação hídrica

A tabela 1 mostra essas propriedades na forma matricial, com os subscritos 1 e 2 indicando as direções principais das lâminas. Das propriedades listadas, as únicas que podem ser questionadas são os quatro umbrais, ou alongamentos de falha. As demais são aceitas sem disputas ou controvérsias.

<i>Propriedades das lâminas no sistema 1 – 2</i>	
<i>Coeficientes de dilatação térmica.</i>	<i>Coeficientes de dilatação hídrica.</i>

$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[\beta] = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Módulos de elasticidade.</i>	<i>Relações de Poisson.</i>
$[E] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ G_{12} \end{bmatrix}$	$[v] = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Alongamentos de falha</i>	
$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \text{Os quatro umbrais} \\ \text{dependem da} \\ \text{tenacidade da resina} \end{bmatrix}$	

Tabela 1
Mostra as 12 propriedades fundamentais das lâminas.

2 – Matrizes das lâminas no sistema local. Essas matrizes são conhecidas.

2.1 – Matriz de elasticidade. A matriz de elasticidade das lâminas é formada pelos módulos reduzidos.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Os módulos reduzidos Q_{ij} são computados a partir das relações de Poisson e dos módulos de elasticidade das lâminas.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

A matriz de elasticidade das lâminas tem o mesmo significado que os módulos de elasticidade.

2.2 – Matriz de rigidez. A matriz de rigidez é obtida multiplicando a matriz de elasticidade pela espessura da lâmina. Ela mede a resistência oferecida pela lâmina a deformações causadas por forças de tração.

$$[A] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times t$$

2.3 – Matriz de forças térmicas. Essa matriz computa as forças térmicas exercidas nas lâminas impedidas de deformar (expandir ou contrair) quando submetidas a variações de temperatura. Essas forças são expressas pelas equações

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

Onde os “alfas” são os coeficientes de dilatação térmica, OT é a temperatura de trabalho e PT é a temperatura de pico no processo de cura da lâmina. As forças térmicas são computadas tomando como referência a temperatura de pico PT na cura. Como as lâminas trabalham embutidas em laminados, PT e OT designam também as temperaturas do laminado.

2.4 – Matriz de forças hídricas. A matriz de forças hídricas é análoga à de forças térmicas, exceto que a dilatação da lâmina é causada por absorção de água, e não por variação de temperatura.

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_1^H \\ N_2^H \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

Onde os “betas” são os coeficientes de dilatação hídrica e Δm é a quantidade de água absorvida pela resina.

Como vemos, as matrizes das lâminas em seus sistemas locais derivam diretamente das propriedades fundamentais delas.

3 – Matrizes das lâminas no sistema global. As matrizes apresentadas na seção anterior estão expressas no sistema local 1 – 2. Para calcular a resposta de laminados, é preciso transformar os coeficientes de dilatação e a matriz de elasticidade [Q] de todas as lâminas do sistema local 1 – 2 para o sistema global x – y. Essas transformações corriqueiras são listadas em todos os livros que tratam de materiais compósitos. Por exemplo:

Transformações para os coeficientes de dilatação

$$\begin{aligned} \alpha_x &= m^2 \alpha_1 + n^2 \alpha_2 \\ \alpha_y &= n^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2 \\ \alpha_{xy} &= 2mn(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_x &= m^2 \beta_1 + n^2 \beta_2 \\ \beta_y &= n^2 \beta_1 + m^2 \beta_2 \\ \beta_{xy} &= 2mn(\beta_2 - \beta_1) \end{aligned}$$

Transformações para a matriz de elasticidade

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\
 Q_{xy} = Q_{yx} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \\
 Q_{xs} = Q_{sx} &= m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{66} \\
 Q_{yy} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\
 Q_{ys} = Q_{sy} &= mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{66} \\
 Q_{ss} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}
 \end{aligned}$$

Nas expressões acima, “m” é o coseno e “n” é o seno do ângulo formado pela direção 1 das lâminas com a direção “x” do sistema global. Mais adiante vamos usar essas relações para computar a matriz [A] e as forças térmicas e hídricas de lâminas UD55 e UD70.

3.1 – A matriz de elasticidade das lâminas no sistema global é montada com os módulos reduzidos devidamente girados para o sistema x – y.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}$$

3.2 – A matriz de rigidez das lâminas no sistema global é obtida multiplicando a matriz de elasticidade pela espessura da lâmina

$$[A] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times t$$

3.3 – A matriz de forças térmicas das lâminas no sistema global é computada usando os módulos reduzidos e os coeficientes de dilatação térmica girados para o sistema global x – y.

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

3.4 – A matriz de forças hídricas das lâminas no sistema global é computada da mesma maneira que a matriz de forças térmicas

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4 – Matrizes de lâminas comerciais no sistema global. Nesta seção vamos apresentar as matrizes das lâminas comerciais expressas no sistema global. Essas são as matrizes efetivamente usadas para fazer cálculos e computar as propriedades dos laminados.

4.1 – Matrizes de lâminas de resina. As lâminas de resina são isotrópicas e suas propriedades não precisam ser giradas para o sistema global $x - y$.

Os coeficientes de dilatação são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,0 \times 10^{-6} \\ 60,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os módulos reduzidos são

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{30000}{1 - 0,30 \times 0,30} = 33000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0,30 \times 30000}{1 - 0,30 \times 0,30} = 10000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = G_{12} = 11500 \text{ kg/cm}^2$$

A matriz de elasticidade é

$$[Q] = \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez é

$$[A] = \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \times t$$

A matriz de forças térmicas é

$$[N^T] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60,0 \times 10^{-6} \\ 60,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,58 \\ 2,58 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

A matriz de forças hídricas é

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17000 \\ 17000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.2 – Matrizes de lâminas de fibras picadas. As lâminas de fibras picadas também são isotrópicas e suas propriedades não precisam ser giradas do sistema local 1 – 2 para o sistema global x – y.

Os coeficientes de dilatação são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,0 \times 10^{-6} \\ 25,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,19 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Os módulos reduzidos são

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{70000}{1 - 0,30 \times 0,30} = 77000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0,30 \times 70000}{1 - 0,30 \times 0,30} = 23000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = G_{12} = 27000 \text{ kg/cm}^2$$

A matriz de elasticidade é

$$[Q] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez é

$$[A] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t$$

A matriz de forças térmicas é

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25,0 \times 10^{-6} \\ 25,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,50 \\ 2,50 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

A matriz de forças hídras é

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,19 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19000 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.3 – Matrizes de lâminas de areia. As lâminas de areia são isotrópicas e suas propriedades não precisam ser giradas.

O protocolo de cálculo é igual aos anteriores

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{60000}{1 - 0,30 \times 0,30} = 66000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0,30 \times 60000}{1 - 0,30 \times 0,30} = 20000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = G_{12} = 23000 \text{ kg/cm}^2$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix} \times t$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,12 \\ 1,12 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,15 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13000 \\ 13000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.4 – Matrizes de tecido T800. As fibras tecidas são posicionadas de modo que suas direções principais 1 e 2 coincidam respectivamente com as direções globais y e x. Sendo assim, os módulos reduzidos e os coeficientes de dilatação das lâminas tecidas devem ser girados em 90 graus.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,7 \times 10^{-6} \\ 16,2 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,09 \\ 0,08 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = Q_{22} = \frac{170000}{1 - 0,27 \times 0,30} = 185000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{yy} = Q_{11} = \frac{190000}{1 - 0,27 \times 0,30} = 206750 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{0,27 \times 190000}{1 - 0,27 \times 0,30} = 55800 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = 27500 \text{ kg/cm}^2$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 185000 & 55800 & 0 \\ 55800 & 206750 & 0 \\ 0 & 0 & 27500 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 185000 & 55800 & 0 \\ 55800 & 206750 & 0 \\ 0 & 0 & 27500 \end{bmatrix} \times t$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 185000 & 55800 & 0 \\ 55800 & 206750 & 0 \\ 0 & 0 & 27500 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18,7 \times 10^{-6} \\ 16,2 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,36 \\ 4,39 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 185000 & 55800 & 0 \\ 55800 & 206750 & 0 \\ 0 & 0 & 27500 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,09 \\ 0,08 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.5 – Matrizes de tecido T600. As fibras tecidas são posicionadas de modo que suas direções principais 1 e 2 coincidam respectivamente com as direções globais y e x. Sendo assim, os módulos reduzidos e os coeficientes de dilatação dessas lâminas devem ser girados em 90 graus.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,8 \times 10^{-6} \\ 14,8 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,08 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = Q_{11} = \frac{112000}{1 - 0,19 \times 0,30} = 119000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{yy} = Q_{22} = \frac{180000}{1 - 0,19 \times 0,30} = 191000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{0,19 \times 180000}{1 - 0,19 \times 0,30} = 36250 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = G_{12} = 24000 \text{ kg/cm}^2$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 119000 & 36250 & 0 \\ 36250 & 191000 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 119000 & 36250 & 0 \\ 36250 & 191000 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \times t$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 119000 & 36250 & 0 \\ 36250 & 191000 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 26,8 \times 10^{-6} \\ 14,8 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,73 \\ 3,80 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 119000 & 36250 & 0 \\ 36250 & 191000 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,08 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18500 \\ 20000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.6 – Matrizes UD90. Essas lâminas são usadas para fazer tanques e tubos pelo processo hoop-chop. Suas direções principais 1 e 2 coincidem respectivamente com as direções do sistema global y e x. Sendo assim, os coeficientes de dilatação e os módulos reduzidos dessas lâminas devem ser girados em 90 graus.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18 \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{yy} = Q_{11} = \frac{400000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 400000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{0,07 \times 400000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 30000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xx} = Q_{22} = \frac{100000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = 35000 \text{ kg/cm}^2$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times t$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,52 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,18 \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.7 – Matrizes UD0. Essas lâminas são usadas em perfis pultrudados. Suas direções principais 1 e 2 coincidem respectivamente com as direções do sistema global x e y. Sendo assim, os coeficientes de dilatação e os módulos reduzidos não precisam ser girados.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 \times 10^{-6} \\ 45,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = Q_{11} = \frac{400000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 400000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{0,07 \times 400000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 30000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{yy} = Q_{22} = \frac{100000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = 35000 \text{ kg/cm}^2$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times t$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7,5 \times 10^{-6} \\ 45,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T] = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,52 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,18 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H] = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21500 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.8 – Matrizes UD55. Essas lâminas são usadas em pares, uma com ângulo +55 graus e outra com ângulo -55 graus. Os laminados feitos com pares UD55 são chamados de “cruzados” com ângulo 55 graus. As direções principais 1 – 2 das lâminas UD55 não coincidem com as direções

do sistema global $x - y$. Sendo assim, os componentes da matriz $[Q]$ e os coeficientes de dilatação devem ser girados dos sistemas locais 1 – 2 para o sistema global $x - y$.

Os coeficientes de dilatação térmica das lâminas UD55 girados para o sistema global são obtidos usando a fórmula geral.

$$\begin{aligned}\alpha_x &= m^2\alpha_1 + n^2\alpha_2 \\ \alpha_y &= n^2\alpha_1 + m^2\alpha_2 \\ \alpha_{xy} &= 2mn(\alpha_2 - \alpha_1)\end{aligned}$$

Onde α_1 e α_2 são os coeficientes de dilatação térmica da lâmina UD nas direções principais 1 e 2 cujos valores são conhecidos. Os ângulos de enrolamento das lâminas UD são representados pelos valores de $m = \cos(\pm 55) = 0,57$ e $n = \sin(\pm 55) = \pm 0,82$. Os coeficientes de dilatação térmica das lâminas UD ± 55 nas direções $x - y$ são obtidos fazendo as devidas substituições na equação acima.

$$\begin{aligned}\alpha_x &= 0,57^2 \times 7,5 \times 10^{-6} + 0,82^2 \times 45,0 \times 10^{-6} = 32,6 \times 10^{-6} \\ \alpha_y &= 0,57^2 \times 45,0 \times 10^{-6} + 0,82^2 \times 7,5 \times 10^{-6} = 19,9 \times 10^{-6} \\ \alpha_{xy} &= \pm 2 \times 0,57 \times 0,82 \times (45,0 - 7,5) \times 10^{-6} = \pm 35,2 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Os coeficientes de dilatação hídrica das lâminas UD ± 55 nas direções globais x e y são calculados de maneira análoga.

$$\begin{aligned}\beta_x &= m^2\beta_1 + n^2\beta_2 \\ \beta_y &= n^2\beta_1 + m^2\beta_2 \\ \beta_{xy} &= 2mn(\beta_2 - \beta_1)\end{aligned}$$

Onde β_1 e β_2 são os coeficientes de dilatação hídrica das lâminas UD nas direções principais 1 e 2 cujos valores são conhecidos. Fazendo as devidas substituições, obtemos para as lâminas UD55

$$\begin{aligned}\beta_x &= 0,57^2 \times 0,04 + 0,82^2 \times 0,18 = 0,13 \\ \beta_y &= 0,57^2 \times 0,18 + 0,82^2 \times 0,04 = 0,08 \\ \beta_{xy} &= \pm 2 \times 0,57 \times 0,82 \times (0,18 - 0,04) = \pm 0,13\end{aligned}$$

Os módulos reduzidos das lâminas UD no sistema local são praticamente iguais aos módulos de elasticidade das lâminas. Isso acontece devido aos valores das relações de Poisson, como mostram as relações abaixo

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{400000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 400000 \text{ kg/cm}^2 \\ Q_{12} = Q_{21} &= \frac{0,07 \times 400000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 30000 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

$$Q_{22} = \frac{100000}{1 - 0,07 \times 0,30} \cong 100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{66} = 35000 \text{ kg/cm}^2$$

Para obter os módulos reduzidos das lâminas UD55 no sistema global x – y, entramos os valores acima nas equações abaixo

$$Q_{xx} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{xs} = Q_{sx} = m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{66}$$

$$Q_{yy} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{ys} = Q_{sy} = mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{66}$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}$$

Onde “m” é o cosseno e “n” é o seno do ângulo formado pela direção 1 das lâminas com a direção “x” do sistema global.

Os módulos reduzidos das lâminas UD55 no sistema global são.

$$Q_{xx} = 132470 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 92220 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{yy} = 235070 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = 101220 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{sx} = Q_{xs} = \pm 46370 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{sy} = Q_{ys} = \pm 94580 \text{ kg/cm}^2$$

Matriz de elasticidade [Q] das lâminas UD55 no sistema global x – y.

$$[Q]_{55} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_{55} = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & \pm 46370 \\ 92220 & 235070 & \pm 94580 \\ \pm 46370 & \pm 94580 & 101220 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez das lâminas UD55 no sistema global é

$$[A]_{55} = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & \pm 46370 \\ 92220 & 235070 & \pm 94580 \\ \pm 46370 & \pm 94580 & 101220 \end{bmatrix} \times t$$

Levando em conta que os laminados cruzados são balanceados, os valores negativos cancelam os positivos e a equação “efetiva” dessas lâminas passa a ser

$$[A]_{55} = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times t$$

As fórmulas para calcular as forças térmicas e hídricas das lâminas UD55 no sistema global são

$$[N^T] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T]_{55} = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & \pm 46370 \\ 92220 & 235070 & \pm 94580 \\ \pm 46370 & \pm 94580 & 101220 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 32,6 \times 10^{-6} \\ 19,9 \times 10^{-6} \\ \pm 35,2 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T]_{55} = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,80 \\ 11,01 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H]_{55} = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & \pm 46370 \\ 92220 & 235070 & \pm 94580 \\ \pm 46370 & \pm 94580 & 101220 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,08 \\ \pm 0,13 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H]_{55} = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30000 \\ 43000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

4.9 – Matrizes UD70. Essas lâminas também são usadas em pares, uma com ângulo +70 graus e outra com ângulo -70 graus. Os laminados feitos com pares UD70 são chamados de “cruzados” com ângulo 70 graus. As direções principais 1 – 2 das lâminas UD não coincidem com as do sistema global x – y. Sendo assim, os componentes da matriz [Q] e os coeficientes de dilatação dessas lâminas devem ser girados do sistema local 1 – 2 para o sistema global x – y. Para os componentes da matriz de elasticidade [Q], essa transformação é feita usando as equações mostrada abaixo.

Os coeficientes de dilatação térmica das lâminas UD55 no sistema global são obtidos usando a fórmula geral.

$$\alpha_x = m^2 \alpha_1 + n^2 \alpha_2$$

$$\alpha_y = n^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2$$

$$\alpha_{xy} = 2mn(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Onde α_1 e α_2 são os coeficientes de dilatação térmica da lâmina UD nas direções principais 1 e 2 cujos valores são conhecidos. Os ângulos de enrolamento das lâminas UD são representados pelos valores de $m = \cos(\pm 70) = 0,34$ e $n = \sin(\pm 70) = \pm 0,94$. Os coeficientes de dilatação térmica das lâminas UD ± 55 nas direções x – y são obtidos fazendo as devidas substituições na equação (15).

$$\alpha_x = (0,34)^2 \times 7,5 \times 10^{-6} + (0,94)^2 \times 45,0 \times 10^{-6} = 40,6 \times 10^{-6}$$

$$\alpha_y = (0,94)^2 \times 7,5 \times 10^{-6} + (0,34)^2 \times 45,0 \times 10^{-6} = 11,8 \times 10^{-6}$$

$$\alpha_{xy} = \pm 2 \times 0,34 \times 0,94 \times (45,0 - 7,5) \times 10^{-6} = \pm 24,0 \times 10^{-6}$$

Os coeficientes de dilatação hídrica das lâminas UD70 nas direções globais x e y são calculados de maneira análoga.

$$\beta_x = m^2 \beta_1 + n^2 \beta_2$$

$$\beta_y = n^2 \beta_1 + m^2 \beta_2$$

$$\beta_{xy} = 2mn(\beta_2 - \beta_1)$$

Onde β_1 e β_2 são os coeficientes de dilatação hídrica das lâminas UD nas direções principais 1 e 2 cujos valores são conhecidos. Fazendo as devidas substituições, obtemos para as lâminas UD70

$$\beta_x = (0,34)^2 \times 0,04 + (0,94)^2 \times 0,18 = 0,16$$

$$\beta_y = (0,94)^2 \times 0,04 + (0,34)^2 \times 0,18 = 0,06$$

$$\beta_{xy} = \pm 2 \times 0,34 \times 0,94 \times (0,18 - 0,04) = \pm 0,09$$

A matriz de lâminas UD no sistema local 1 – 2 é

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix}$$

Para obter os módulos reduzidos de lâminas UD70 no sistema global x – y, entramos os valores acima nas equações abaixo

$$Q_{xx} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{xs} = Q_{sx} = m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{66}$$

$$Q_{yy} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{ys} = Q_{sy} = mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{66}$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}$$

Onde “m” é o cosseno e “n” é o seno do ângulo formado pela direção 1 das lâminas com a direção “x” do sistema global.

Os módulos reduzidos das lâminas UD70 no sistema global são.

$$Q_{xx} = 104000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 61000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{yy} = 334000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{ss} = 66000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{sx} = Q_{xs} = \pm 11300 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q_{sy} = Q_{ys} = \pm 85140 \text{ kg/cm}^2$$

A matriz de elasticidade [Q] das lâminas UD70 no sistema global x – y é

$$[Q]_{70} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_{70} = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & \pm 11300 \\ 61000 & 334000 & \pm 85140 \\ \pm 11300 & \pm 85140 & 66000 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez das lâminas UD70 no sistema global é

$$[A]_{70} = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & \pm 11300 \\ 61000 & 334000 & \pm 85140 \\ \pm 11300 & \pm 85140 & 66000 \end{bmatrix} \times t$$

$$[A]_{70} = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & 0 \\ 61000 & 334000 & 0 \\ 0 & 0 & 66000 \end{bmatrix} \times t$$

Onde os termos negativos e positivos cancelam.

As fórmulas para calcular as forças térmicas e hídricas são

$$[N^T]_{70} = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & \pm 11300 \\ 61000 & 334000 & \pm 85140 \\ \pm 11300 & \pm 85140 & 66000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 40,6 \times 10^{-6} \\ 11,8 \times 10^{-6} \\ \pm 24,0 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^T]_{70} = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,21 \\ 8,46 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$$

$$[N^H]_{70} = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & \pm 11300 \\ 61000 & 334000 & \pm 85140 \\ \pm 11300 & \pm 85140 & 66000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,16 \\ 0,06 \\ \pm 0,09 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

$$[N^H]_{70} = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000 \\ 37000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$$

Apêndice

Matrizes de lâminas comerciais no sistema global

Este capítulo mostrou como obter as matrizes de lâminas no sistema global. Neste apêndice tabelamos todas as matrizes, de todas as lâminas comerciais, expressas no sistema global. Essas tabelas são úteis para calcular os alongamentos totais de lâminas embutidas em laminados submetidos a cargas térmicas, hídricas e mecânicas. Elas são úteis também para computar as propriedades exatas de laminados, o que não pode ser feito usando a lei das misturas unidimensional.

<i>Lâmina de resina</i>	
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>	<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,0 \times 10^{-6} \\ 60,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$	$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,40 \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Módulos de elasticidade.</i>	<i>Relações de Poisson.</i>
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\ 000 \\ 30\ 000 \\ 11\ 500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,30 \end{bmatrix}$
<i>Matriz de elasticidade</i>	<i>Matriz de rigidez</i>
$[Q] = \begin{bmatrix} 33\ 000 & 10\ 000 & 0 \\ 10\ 000 & 33\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\ 500 \end{bmatrix}$	$[A] = \begin{bmatrix} 33\ 000 & 10\ 000 & 0 \\ 10\ 000 & 33\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\ 500 \end{bmatrix} \times t$
<i>Força térmica</i>	<i>Força hídrica</i>
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,58 \\ 2,58 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$	$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17000 \\ 17000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$

<i>Lâmina de areia</i>

<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>		<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$		$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,28 \\ 0,28 \\ 0 \end{bmatrix}$	
<i>Módulos de elasticidade.</i>		<i>Relações de Poisson.</i>	
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60\ 000 \\ 60\ 000 \\ 23\ 000 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,30 \end{bmatrix}$	
<i>Matriz de elasticidade</i>		<i>Matriz de rigidez</i>	
$[Q] = \begin{bmatrix} 66\ 000 & 20\ 000 & 0 \\ 20\ 000 & 66\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 23\ 000 \end{bmatrix}$		$[A] = \begin{bmatrix} 66\ 000 & 20\ 000 & 0 \\ 20\ 000 & 66\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 23\ 000 \end{bmatrix} \times t$	
<i>Força térmica</i>		<i>Força hídrica</i>	
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,12 \\ 1,12 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$		$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13000 \\ 13000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$	

<i>Lâmina de fibras picadas</i>			
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>		<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,0 \times 10^{-6} \\ 25,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$		$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0 \end{bmatrix}$	
<i>Módulos de elasticidade.</i>		<i>Relações de Poisson.</i>	
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \\ 70000 \\ 27000 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,30 \end{bmatrix}$	
<i>Matriz de elasticidade</i>		<i>Matriz de rigidez</i>	
$[Q] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix}$		$[A] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t$	
<i>Força térmica</i>		<i>Força hídrica</i>	
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,50 \\ 2,50 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$		$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19000 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$	

<i>Lâmina UD90</i>

<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>		<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$		$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,24 \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix}$	
<i>Módulos de elasticidade.</i>		<i>Relações de Poisson.</i>	
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\ 000 \\ 400\ 000 \\ 35\ 000 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,08 \end{bmatrix}$	
<i>Matriz de elasticidade</i>		<i>Matriz de rigidez</i>	
$[Q] = \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix}$		$[A] = \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times t$	
<i>Força térmica</i>		<i>Força hídrica</i>	
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,52 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$		$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19000 \\ 21000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$	

<i>Lâmina UD0</i>			
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>		<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 \times 10^{-6} \\ 45,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$		$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,24 \\ 0 \end{bmatrix}$	
<i>Módulos de elasticidade.</i>		<i>Relações de Poisson.</i>	
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400\ 000 \\ 100\ 000 \\ 35\ 000 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,30 \end{bmatrix}$	
<i>Matriz de elasticidade</i>		<i>Matriz de rigidez</i>	
$[Q] = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix}$		$[A] = \begin{bmatrix} 400000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times t$	
<i>Força térmica</i>		<i>Força hídrica</i>	
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,52 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$		$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$	

<i>Lâminas UD55</i>			
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>		<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,6 \times 10^{-6} \\ 19,9 \times 10^{-6} \\ \pm 35,2 \times 10^{-6} \end{bmatrix} 1/C$		$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18 \\ 0,11 \\ \pm 0,19 \end{bmatrix}$	
<i>Módulos de elasticidade.</i>		<i>Relações de Poisson.</i>	

$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96300 \\ 170800 \\ 101200 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,70 \\ 0,39 \end{bmatrix}$
<i>Matriz de elasticidade</i>	<i>Matriz de rigidez</i>
$[Q] = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix}$	$[A] = \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times t$
<i>Força térmica</i>	<i>Força hídrica</i>
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,80 \\ 11,01 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$	$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30000 \\ 40000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$

<i>Lâminas UD70</i>	
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>	<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,6 \times 10^{-6} \\ 11,8 \times 10^{-6} \\ \pm 24,0 \times 10^{-6} \end{bmatrix} 1/C$	$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,06 \\ \pm 0,13 \end{bmatrix}$
<i>Módulos de elasticidade.</i>	<i>Relações de Poisson.</i>
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92800 \\ 298200 \\ 66\ 000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,59 \\ 0,18 \end{bmatrix}$
<i>Matriz de elasticidade</i>	<i>Matriz de rigidez</i>
$[Q] = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & 0 \\ 61000 & 334000 & 0 \\ 0 & 0 & 66000 \end{bmatrix}$	$[A] = \begin{bmatrix} 104000 & 61000 & 0 \\ 61000 & 334000 & 0 \\ 0 & 0 & 66000 \end{bmatrix} \times t$
<i>Força térmica</i>	<i>Força hídrica</i>
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,21 \\ 8,46 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$	$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000 \\ 37000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$

<i>Lâmina T800</i>	
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>	<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>

$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,7 \times 10^{-6} \\ 16,2 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$	$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,09 \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Módulos de elasticidade.</i>	<i>Relações de Poisson.</i>
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170000 \\ 190000 \\ 27500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,27 \end{bmatrix}$
<i>Matriz de elasticidade</i>	<i>Matriz de rigidez</i>
$[Q] = \begin{bmatrix} 185000 & 55800 & 0 \\ 55800 & 206750 & 0 \\ 0 & 0 & 27500 \end{bmatrix}$	$[A] = \begin{bmatrix} 185000 & 55800 & 0 \\ 55800 & 206750 & 0 \\ 0 & 0 & 27500 \end{bmatrix} \times t$
<i>Força térmica</i>	<i>Força hídrica</i>
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,36 \\ 4,39 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$	$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$

<i>Lâmina T600</i>	
<i>Coefficientes de dilatação térmica.</i>	<i>Coefficientes de dilatação hídrica.</i>
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,8 \times 10^{-6} \\ 14,8 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} 1/C$	$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,09 \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Módulos de elasticidade.</i>	<i>Relações de Poisson.</i>
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112000 \\ 180000 \\ 24000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_{yx} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,19 \end{bmatrix}$
<i>Matriz de elasticidade</i>	<i>Matriz de rigidez</i>
$[Q] = \begin{bmatrix} 119000 & 36250 & 0 \\ 36250 & 191000 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix}$	$[A] = \begin{bmatrix} 119000 & 36250 & 0 \\ 36250 & 191000 & 0 \\ 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \times t$
<i>Força térmica</i>	<i>Força hídrica</i>
$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,73 \\ 3,80 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times (OT - PT)$	$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18500 \\ 20000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t \times \Delta m$

Capítulo 7

Lei das misturas matricial

Matrizes e propriedades de laminados

1 – Introdução. Neste capítulo vamos usar a lei das misturas bidimensional para montar as três matrizes fundamentais de laminados cilíndricos.

- *Matriz de rigidez* $[A]$
- *Matriz de resultantes térmicas* $[N^T]$
- *Matriz de resultantes hídricas* $[N^H]$

Os elementos dessas matrizes são computados a partir das matrizes das lâminas expressas no sistema global, todas deduzidas e tabeladas no apêndice do capítulo anterior. A análise exata de laminados é feita usando essas três matrizes, que servem também para computar as propriedades exatas de laminados.

2 – Matriz de rigidez de laminados. Essa matriz é obtida somando as contribuições de todas lâminas que compõem o laminado.

$$[A] = [A]_{pic} + [A]_{tec} + [A]_{UD} + [A]_{areia} + [A]_r$$

$$[A] = [Q]_{pic} \times t_{pic} + [Q]_{tec} \times t_{tec} + [Q]_{UD} \times t_{UD} + [Q]_{areia} \times t_{areia} + [Q]_r \times t_r$$

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1. *Computar a matriz de rigidez de laminados de fibras picadas,*

$$[A] = [A]_{pic} + [A]_r$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t_{pic} + \begin{bmatrix} 33\,000 & 10\,000 & 0 \\ 10\,000 & 33\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\,500 \end{bmatrix} \times t_r$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t_{pic} + \begin{bmatrix} 33\,000 & 10\,000 & 0 \\ 10\,000 & 33\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\,500 \end{bmatrix} \times t_r$$

Exemplo 2. Computar a matriz de rigidez de laminados feitos com fibras picadas e lâminas UD55.

$$[A] = [A]_{pic} + [A]_{UD} + [A]_r$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t_{pic} + \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times t_{UD}$$

$$+ \begin{bmatrix} 33\,000 & 10\,000 & 0 \\ 10\,000 & 33\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\,500 \end{bmatrix} \times t_r$$

Exemplo 3. Computar a matriz de rigidez de laminados hoop-chop.

Os laminados hoop-chop são construídos com lâminas de resina, de fibras picadas, de areia e UD90. As matrizes de rigidez dessas lâminas foram deduzidas e tabeladas no capítulo anterior.

$$[A] = [A]_{pic} + [A]_{UD} + [A]_{areia} + [A]_{res}$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t_{pic} + \begin{bmatrix} 100000 & 30000 & 0 \\ 30000 & 400000 & 0 \\ 0 & 0 & 35000 \end{bmatrix} \times t_{UD}$$

$$\begin{bmatrix} 66\,000 & 20\,000 & 0 \\ 20\,000 & 66\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 23\,000 \end{bmatrix} \times t_{areia} + \begin{bmatrix} 33\,000 & 10\,000 & 0 \\ 10\,000 & 33\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\,500 \end{bmatrix} \times t_r$$

A matriz de rigidez de laminados pode ser computada também usando os teores dos componentes, da mesma maneira que fizemos para a lei das misturas unidimensional.

$$[A] = \frac{3,12 \times t}{1,20 + 1,40(res)} \times [2,33(pic)[Q]_{pic} + 0,74(UD)[Q]_{UD} + 0,60(areia)[Q]_{areia} + 0,83K[Q]_r]$$

Onde

t é a espessura do laminado
 (res) é o teor de resina

(pic) é o teor de fibras picadas

(UD) é o teor de fibras UD

(areia) é o teor de areia

K é a segura do laminado

$$K = (\text{res}) - \left[\frac{3}{7}(\text{UD}) + \frac{7}{3}(\text{pic}) + \frac{2}{8}(\text{areia}) \right]$$

Exemplo 4. Computar a matriz de rigidez de um laminado UD55 com 8,0 mm de espessura e a composição seguinte.

$$(\text{res}) = 0,30$$

$$(\text{pic}) = 0,05$$

$$(\text{UD}) = 0,65$$

A segura do laminado é

$$K = (\text{res}) - \left[\frac{3}{7}(\text{UD}) + \frac{7}{3}(\text{pic}) \right]$$

$$K = (0,30) - \left[\frac{3}{7}(0,65) + \frac{7}{3}(0,05) \right] = -0,10$$

A segura negativa indica que a quantidade de resina é 10% menor que a definida como padrão. Isso nada tem a ver com a qualidade do laminado.

A matriz de rigidez é

$$[A] = \frac{3,12 \times 0,8}{1,20 + 1,40 \times 0,30} \times \left[2,33 \times 0,05 \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} + 0,74 \times 0,65 \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} - 0,83 \times 0,10 \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \right]$$

Note que a espessura do laminado entra na equação acima em cm, porque a matriz de rigidez foi deduzida usando os módulos em kg/cm². Fazendo os cálculos, obtemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 107773 & 71192 & 0 \\ 71192 & 183810 & 0 \\ 0 & 0 & 78389 \end{bmatrix}$$

Essa é a matriz de rigidez do laminado proposto, computada usando os teores dos constituintes. Como dissemos, a matriz de rigidez de laminados pode ser computada também usando as espessuras das lâminas.

3 – Propriedades elásticas de laminados. Essas propriedades podem ser derivadas da lei de Hooke na forma matricial, que relaciona as forças externas com os alongamentos no laminado.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Na equação acima, a matriz [N] representa as forças externas e a matriz [ε] indica os alongamentos do laminado no sistema global

As equações para computar os módulos são deduzidas simulando os ensaios usados para medi-los. Por exemplo, o ensaio para medir o módulo na direção x é feito considerando apenas a força Nx. Sendo assim, as demais forças na equação de Hooke são tomadas iguais a zero, isto é, Ny = Nxy = 0.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo as matrizes acima, obtemos duas equações

$$\begin{aligned} N_x &= A_{xx}\epsilon_x + A_{xy}\epsilon_y \\ 0 &= A_{xy}\epsilon_x + A_{yy}\epsilon_y \end{aligned}$$

Eliminando o alongamento εy nesse sistema, obtemos

$$N_x = \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right) \times \epsilon_x$$

Dividindo essa expressão pela espessura do laminado, obtemos

$$\sigma_x = \frac{1}{t} \times \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right) \times \epsilon_x$$

De onde obtemos, por definição

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = E_x = \frac{1}{t} \times \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right)$$

O mesmo raciocínio pode ser repetido para as forças N_y e N_{xy} .

$$E_y = \frac{1}{t} \times \left(A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}} \right)$$

$$G_{xy} = \frac{A_{ss}}{t}$$

As relações de Poisson do laminado são, por definição

$$\nu_{xy} = \frac{A_{xy}}{A_{yy}}$$

$$\nu_{yx} = \frac{A_{xy}}{A_{xx}}$$

Como vemos, as propriedades elásticas de qualquer laminado cilíndrico podem ser deduzidas de suas matrizes de rigidez.

4 – Propriedades térmicas de laminados. A matriz de resultantes térmica $[N^T]$ de laminados cilíndricos é obtida somando as forças térmicas de todas as lâminas expressas no sistema global.

Essas forças podem ser computadas usando a equação das espessuras

$$[N^T] = [N^T]_{pic} \times t_{pic} + [N^T]_{tec} \times t_{tec} + [N^T]_{UD} \times t_{UD} + [N^T]_{areia} \times t_{areia} + [N^T]_r \times t_r$$

As forças térmicas das lâminas comerciais expressas no sistema global foram deduzidas e tabeladas no capítulo anterior.

As forças térmicas do laminado podem ser computadas também partindo dos teores

$$[N^T] = \frac{3,12 \times t}{1,20 + 1,40(res)} \times [2,33(pic)[N^T]_{pic} + 0,74(UD)[N^T]_{UD} + 0,60(areia)[N^T]_{areia} + 0,83K[N^T]_r]$$

Exemplo 5. Computar as resultantes térmicas de um laminado hoop-chop em fase de projeto. As espessuras arbitradas pelo projetista são:

$$t_{pic} = 2,0 \text{ mm}$$

$$t_{UD} = 3,0 \text{ mm}$$

$$t_r = 0,6 \text{ mm}$$

$$t_{areia} = 4,0 \text{ mm}$$

A equação a ser usada é

$$[N^T] = [N^T]_{pic} \times t_{pic} + [N^T]_{UD} \times t_{UD} + [N^T]_{areia} \times t_{areia} + [N^T]_r \times t_r$$

As matrizes térmicas das lâminas estão tabeladas no capítulo 5.

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 2,50 \\ 2,50 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{pic} + \begin{bmatrix} 4,52 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{UD} + \begin{bmatrix} 1,12 \\ 1,12 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{areia} + \begin{bmatrix} 2,58 \\ 2,58 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_r \right\} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 2,50 \\ 2,50 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,2 + \begin{bmatrix} 4,52 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,3 + \begin{bmatrix} 1,12 \\ 1,12 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,4 + \begin{bmatrix} 2,58 \\ 2,58 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,06 \right\} \times (OT - PT)$$

Note que as espessuras das lâminas entram na equação em cm, porque os módulos usados para calcular as matrizes térmicas das lâminas foram expressos em kg/cm². A resultante térmica do laminado é

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,46 \\ 2,41 \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

Exemplo 6. Computar os coeficientes de dilatação térmica do laminado discutido no exemplo anterior.

Os coeficientes de dilatação térmica de laminados são computados substituindo as forças externas $[N]$ pelas resultantes térmicas $[N^T]$ na equação de Hooke.

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} 2,46 \\ 2,41 \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT) = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} 2,46 \\ 2,41 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez do laminado é calculada da maneira usual

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times 0,2 + \begin{bmatrix} 33\ 000 & 10\ 000 & 0 \\ 10\ 000 & 33\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\ 500 \end{bmatrix} \times 0,06$$

$$+ \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times 0,3 + \begin{bmatrix} 66\,000 & 20\,000 & 0 \\ 20\,000 & 66\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 23\,000 \end{bmatrix} \times 0,4$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73\,800 & 22\,000 & 0 \\ 22\,000 & 164\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 26\,000 \end{bmatrix}$$

Entrando esse valor na equação de Hooke, temos

$$\begin{bmatrix} 2,46 \\ 2,41 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73\,800 & 22\,000 & 0 \\ 22\,000 & 164\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 26\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo essa equação, temos

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,2 \times 10^{-6} \\ 10,7 \times 10^{-6} \end{bmatrix} 1/^\circ\text{C}$$

Essa é a maneira de computar os coeficientes de dilatação térmica de laminados usando a lei das misturas matricial. Ao contrário da lei das misturas unidimensional, a lei matricial leva em conta as interações entre as lâminas e dá valores exatos.

5 – Resultantes hídras de laminados. A matriz de resultantes hídras $[N^H]$ de laminados cilíndricos é obtida somando as forças térmicas de todas suas lâminas expressas no sistema global.

$$[N^H] = [N^H]_{pic} \times t_{pic} + [N^H]_{tec} \times t_{tec} + [N^H]_{UD} \times t_{UD} + [N^H]_{areia} \times t_{areia} + [N^H]_r \times t_r$$

As forças hídras de todas as lâminas comerciais expressas no sistema global foram deduzidas e tabeladas no capítulo anterior.

As forças hídras podem ser computadas também em função dos teores

$$[N^H] = \frac{3,12 \times t}{1,20 + 1,40(res)} \times [2,33(pic)[N^H]_{pic} + 0,74(UD)[N^H]_{UD} + 0,60(areia)[N^H]_{areia} + 0,83K[N^H]_r]$$

Os coeficientes de dilatação hídrá de laminados são computados exatamente da mesma maneira que os de dilatação térmica

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrando que na equação acima as resultantes hídricas devem ser computadas para $\Delta m = 1$, da mesma maneira que para computar os coeficientes de dilatação térmica a variação de temperatura deve ser $(OT - PT) = 1$.

Portanto, as propriedades elásticas e os coeficientes de dilatação de laminados podem ser computadas a partir dos elementos da matriz de rigidez $[A]$ e das matrizes de resultantes $[N^T]$ e $[N^H]$. Essas mesmas propriedades foram computadas nos capítulos 2 e 3, usando a lei das misturas unidimensional.

A lei das misturas matricial dá valores exatos para as propriedades dos laminados. A lei das misturas unidimensional dá valores aproximados. O exemplo numérico que segue esclarece isso.

Exemplo 4 – *Computar as propriedades elásticas e os coeficientes de dilatação de um laminado UD55 em fase de projeto.*

As espessuras padrão das lâminas arbitradas pelo projetista, são

$$\begin{aligned} t_{pic} &= 2,1 \text{ mm} \\ t_{UD} &= 8,0 \text{ mm} \\ t_r &= 0,6 \text{ mm} \end{aligned}$$

A espessura de projeto do laminado é

$$t = 2,1 + 8,0 + 0,6 = 10,7 \text{ mm}$$

O problema será resolvido de duas maneiras. Primeiro usando a regra das misturas unidimensional e em seguida a regra das misturas matricial.

Regra das misturas unidimensional

Os módulos são computados usando a equação das espessuras

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{2,1}{10,7} + 96220 \times \frac{8,0}{10,7} + 30000 \times \frac{0,6}{10,7} \\ 70000 \times \frac{2,1}{10,7} + 170800 \times \frac{8,0}{10,7} + 30000 \times \frac{0,6}{10,7} \\ 27000 \times \frac{2,1}{10,7} + 101220 \times \frac{8,0}{10,7} + 11500 \times \frac{0,6}{10,7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87360 \\ 143120 \\ 81620 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

As relações de Poisson são

$$v_{yx} = v_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + v_{UD}^{yx} \times \frac{t_{UD}}{t} + v_r \times \frac{t_r}{t}$$

$$v_{yx} = 0,30 \times \frac{2,1}{10,7} + 0,70 \times \frac{8,0}{10,7} + 0,30 \times \frac{0,6}{10,7} = 0,60$$

$$v_{xy} = v_{yx} \times \frac{E_x}{E_y} = 0,60 \times \frac{87360}{143120} = 0,37$$

Os coeficientes de dilatação térmica são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \alpha_{UD}^x \times t_{UD} + 1,80 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{1,75 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \alpha_{UD}^y \times t_{UD} + 1,80 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,75 \times 2,1 + 96220 \times 32,6 \times 10^{-6} \times 8,0 + 1,80 \times 0,6}{87360 \times 10,7} \\ \frac{1,75 \times 2,1 + 170800 \times 19,9 \times 10^{-6} \times 8,0 + 1,80 \times 0,6}{143120 \times 10,7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,9 \times 10^{-6} \\ 20,9 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação hidrica são

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13000 \times t_{pic} + E_{UD}^x \times \beta_{UD}^x \times t_{UD} + 12000 \times t_r}{E_x \times t} \\ \frac{13000 \times t_{pic} + E_{UD}^y \times \beta_{UD}^y \times t_{UD} + 12000 \times t_r}{E_y \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13000 \times 2,1 + 96300 \times 0,13 \times 8 + 12000 \times 0,6}{87585 \times 10,7} \\ \frac{13000 \times 2,1 + 170800 \times 0,09 \times 8 + 12000 \times 0,6}{143810 \times 10,7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,10 \end{bmatrix}$$

Regra das misturas matricial

A matriz de rigidez é computada entrando na equação apropriada as espessuras das lâminas em cm.

$$[A] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times 0,21 + \begin{bmatrix} 33\ 000 & 10\ 000 & 0 \\ 10\ 000 & 33\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\ 500 \end{bmatrix} \times 0,06$$

$$+ \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times 0,80$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 124126 & 79206 & 0 \\ 79206 & 206206 & 0 \\ 0 & 0 & 87336 \end{bmatrix}$$

As propriedades elásticas são computadas a partir da matriz de rigidez

$$E_x = \frac{1}{t} \times \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right)$$

$$E_x = \frac{1}{1,07} \times \left(124126 - \frac{79206^2}{206206} \right) = 87572$$

$$E_y = \frac{1}{t} \times \left(A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{1,07} \times \left(206206 - \frac{79206^2}{124126} \right) = 145480$$

$$G_{xy} = \frac{A_{ss}}{t}$$

$$G_{xy} = \frac{87336}{1,07} = 81622$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{xy}}{A_{yy}} = \frac{79206}{206206} = 0,38$$

$$\nu_{yx} = \frac{A_{xy}}{A_{xx}} = \frac{79206}{124126} = 0,64$$

A resultante térmica do laminado é a soma das forças térmicas de todas as lâminas. Essas forças foram tabeladas no capítulo anterior.

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,80 \\ 11,01 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,8 \times (OT - PT) + \begin{bmatrix} 2,58 \\ 2,58 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,06 \times (OT - PT) + \begin{bmatrix} 2,50 \\ 2,50 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,21 \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,92 \\ 9,49 \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

Por definição, os coeficientes de dilatação térmica são os alongamentos produzidos pela variação de 1 grau na temperatura do laminado. Considerando $(OT - PT) = 1$ e usando a lei de Hooke

$$\begin{bmatrix} 6,92 \\ 9,49 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124126 & 79206 & 0 \\ 79206 & 206206 & 0 \\ 0 & 0 & 87336 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,0 \times 10^{-6} \\ 32,6 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

A resultante hídrica do laminado é

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30000 \\ 40000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,8 \times \Delta m + \begin{bmatrix} 19000 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,21 \times \Delta m + \begin{bmatrix} 17000 \\ 17000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,06 \times \Delta m$$

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 37000 \\ 0 \end{bmatrix} \times \Delta m$$

Por definição, os coeficientes de dilatação hídrica são iguais aos alongamentos quando o laminado absorve 1,0% de água, isto é, quando $\Delta m = 1$.

$$\begin{bmatrix} 29000 \\ 37000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124126 & 79206 & 0 \\ 79206 & 206206 & 0 \\ 0 & 0 & 87336 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 \\ 0,12 \end{bmatrix}$$

A tabela 1 compara os resultados aproximados, obtidos pela lei das misturas unidimensional, com os exatos, obtidos usando matrizes. O erro cometido pela lei unidimensional é pequeno e perfeitamente aceitável para calcular os módulos. Porém, esse erro é muito grande e inaceitável para os coeficientes de dilatação térmica e hídrica de laminados cruzados. A explicação para isso será apresentada no apêndice deste capítulo.

Propriedade	Lei das misturas unidimensional	Lei das misturas matricial	Erro
E_x	87360	87572	- 0,24%
E_y	143120	145480	- 1,65%
G_{xy}	81620	81622	0,00
ν_{xy}	0,37	0,38	- 2,70%
ν_{yx}	0,60	0,64	- 6,67%
α_x	$31,9 \times 10^{-6}$	$35,0 \times 10^{-6}$	- 9,72%
α_y	$20,9 \times 10^{-6}$	$32,6 \times 10^{-6}$	- 56,0%
β_x	0,14	0,16	- 12,5%
β_y	0,10	0,12	- 17,0%

Tabela 1

Compara as propriedades elásticas e os coeficientes de dilatação computadas pela lei das misturas unidimensional e por matrizes, para laminados UD55. Observe o enorme erro nos coeficientes de dilatação.

Apêndice

Erro da lei das misturas unidimensional

Os coeficientes de dilatação de laminados cilíndricos devem ser obtidas usando as matrizes da lei das misturas bidimensional. Essas matrizes dão resultados exatos, porque levam em conta as relações de Poisson e a distorção das lâminas quando submetidas a variações térmicas ou hídricas.

A matriz de rigidez de laminados é

$$[A] = \sum \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & \pm Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & \pm Q_{ys} \\ \pm Q_{sx} & \pm Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times t$$

Como todos laminados comerciais são balanceados, a matriz de rigidez simplifica para

$$[A] = \sum \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \times t$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix}$$

A matriz de resultantes térmicas de laminados é

$$[N^T] = \sum \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & \pm Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & \pm Q_{ys} \\ \pm Q_{sx} & \pm Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \pm \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times t$$

$$[N^T] = \sum \begin{bmatrix} Q_{xx}\alpha_x t + Q_{xy}\alpha_y t + Q_{xs}\alpha_{xy} t \\ Q_{yx}\alpha_x t + Q_{yy}\alpha_y t + Q_{ys}\alpha_{xy} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Igualmente para as resultantes hídricas

$$[N^H] = \sum \begin{bmatrix} Q_{xx}\beta_x t + Q_{xy}\beta_y t + Q_{xs}\beta_{xy} t \\ Q_{yx}\beta_x t + Q_{yy}\beta_y t + Q_{ys}\beta_{xy} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essas matrizes permitem computar os módulos, as relações de Poisson e os coeficiente de dilatação de qualquer laminado cilíndrico de seção circular.

Usando matrizes, o módulo de elasticidade do laminado na direção x é

$$E_x = \frac{1}{t} \times \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right) = \frac{1}{t} \times A_{xx} (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})$$

Pela lei unidimensional, o módulo de elasticidade na direção x é

$$E_x = \frac{1}{t} \times \sum E_x t = \frac{1}{t} \times A_{xx} (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})$$

As duas expressões são idênticas. As propriedades elásticas computadas pela lei unidimensional são iguais às computadas usando matrizes. Os pequenos erros observados nas computações decorrem de arredondamentos nos cálculos.

Vamos ver agora os coeficientes de dilatação.

Os coeficientes de dilatação térmica computados usando a lei unidimensional são

$$\sum \begin{bmatrix} Q_{xx}\alpha_x t \\ Q_{yy}\alpha_y t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esses mesmos coeficientes computados usando matrizes são

$$\sum \begin{bmatrix} Q_{xx}\alpha_x t + \mathbf{Q}_{xy}\alpha_y t + \mathbf{Q}_{xs}\alpha_{xy} t \\ \mathbf{Q}_{yx}\alpha_x t + Q_{yy}\alpha_y t + \mathbf{Q}_{ys}\alpha_{xy} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & \mathbf{A}_{xy} & 0 \\ \mathbf{A}_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como vemos, essas expressões são diferentes. Os elementos marcados em negrito nas matrizes acima são ignorados na lei unidimensional. A lei unidimensional **não é boa** para calcular coeficientes de dilatação de laminados cruzados, onde é grande a influência da distorção introduzida pelas lâminas UD.

Capítulo 8

Alongamentos totais

1 – Introdução. A vida estrutural dos equipamentos de compósitos termina quando os danos acumulados na lâmina crítica, aquela que controla sua utilidade funcional, iguala o valor de falha. Essa é a definição correta da durabilidade estrutural dos equipamentos de compósitos.

O projeto desses equipamentos, porém, raramente é feito levando em conta a durabilidade. Na prática o dimensionamento é feito usando apenas critérios de curto prazo, nos quais os alongamentos totais nas lâminas críticas são mantidos abaixo dos umbrais de falha. Os quatro umbrais de falha fazem parte das 12 propriedades fundamentais das lâminas, sendo conhecidos para todas elas. A função do projetista é desenhar um laminado capaz de manter os alongamentos totais das lâminas críticas abaixo de valores admissíveis. Essa é a essência do critério clássico de dimensionamento por alongamentos.

Os alongamentos totais das lâminas são obtidos somando os componentes mecânicos com os residuais.

$$[\text{Alongamento}]_{\text{total}} = [\text{Alongamento}]_{\text{mecânico}} + [\text{Alongamento}]_{\text{residual térmico}} + [\text{Alongamento}]_{\text{residual hídrico}}$$

A equação acima pode ser escrita como

$$\epsilon = \epsilon_M + \epsilon_T + \epsilon_H$$

Os exemplos que seguem mostram como calcular os alongamentos totais de duas barras A e B, feitas com materiais diferentes, submetidas a cargas mecânicas e a variações de temperatura e de umidade. São feitos dois experimentos. Em um deles as barras são independentes, não coladas, para reproduzir a condição de lâminas isoladas. Em outro, elas são coladas uma na outra, para reproduzir a resposta de laminados. As barras A e B têm o mesmo comprimento na temperatura ambiente e em atmosfera seca.

Exemplo 1. Calcular os alongamentos totais barras A e B quando a temperatura varia ΔT e a quantidade de água absorvida varia Δm . As barras são isoladas e sem forças mecânicas aplicadas nelas.

Os alongamentos totais das barras isoladas são:

Para a barra A: $\epsilon_A = \alpha_A \Delta T + \beta_A \Delta m$

Para a barra B: $\epsilon_B = \alpha_B \Delta T + \beta_B \Delta m$

Onde os parâmetros alfa e beta são os coeficientes de dilatação.

Exemplo 2. Neste exemplo supomos as barras coladas uma na outra, para simular o comportamento de laminados. A figura 1 mostra as barras A e B de igual comprimento L e coeficientes de dilatação térmica α_A e α_B coladas uma na outra. A colagem é feita na temperatura ambiente e em atmosfera seca, para evitar tensões de montagem. Suponha que a temperatura suba da quantidade ΔT . Se as barras não fossem coladas uma na outra elas assumiriam os comprimentos $L(1 + \alpha_A \Delta T)$ e $L(1 + \alpha_B \Delta T)$. Porém, por estarem coladas, elas são impedidas de expandir livremente e assumem a dimensão de equilíbrio $L(1 + \alpha \Delta T)$, onde α é o coeficiente de dilatação térmica médio.

A figura mostra que na posição de equilíbrio a barra A é comprimida e a barra B é tracionada. As forças de tração e de compressão nessas barras têm origem claramente mecânica. Elas resultam da ação de uma barra sobre a outra, e geram os chamados “alongamentos térmicos residuais”. Os alongamentos residuais são alongamentos mecânicos de origem térmica.

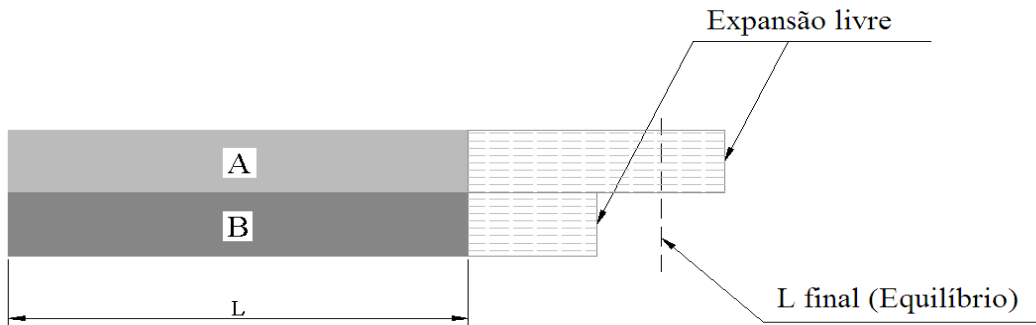


Figura 1
Mostra as deformações sofridas pelas barras coladas uma na outra, como as lâminas embutidas em laminados.

As barras A e B têm o mesmo alongamento térmico de equilíbrio, porque elas estão coladas uma na outra. Esse alongamento é:

Alongamento térmico de equilíbrio das barras A e B:

$$\epsilon_A = (\alpha) \Delta T \text{ (Expansão)}$$

Os alongamentos residuais térmicos das barras A e B são:

Alongamento residual térmico da barra A:

$$\epsilon_A^r = (\alpha - \alpha_A) \Delta T \text{ (Compressão)}$$

Alongamento residual térmico da barra B:

$$\epsilon_B^r = (\alpha - \alpha_B)\Delta T \text{ (Tração)}$$

Os alongamentos residuais hídricos são obtidos da mesma maneira

Alongamento residual hídrico da barra A:

$$\epsilon_A^r = (\beta - \beta_A)\Delta T \text{ (Compressão)}$$

Alongamento residual hídrico da barra B:

$$\epsilon_B^r = (\beta - \beta_B)\Delta T \text{ (Tração)}$$

Note que os alongamentos residuais são computados subtraindo os alongamentos livres dos alongamentos de equilíbrio. Essa observação é importante para entender os cálculos apresentados em seguida

Exemplo 3. Calcular os alongamentos totais das barras A e B quando coladas uma na outra.

Os alongamentos totais são obtidos somando os mecânicos com os residuais.

Para a barra A:

$$\epsilon = \epsilon_M + (\alpha - \alpha_A)\Delta T + (\beta - \beta_A)\Delta m$$

Para a barra B:

$$\epsilon = \epsilon_M + (\alpha - \alpha_B)\Delta T + (\beta - \beta_B)\Delta m$$

2 – Cálculo dos alongamentos totais. – O procedimento para calcular os alongamentos totais de lâminas embutidas em laminados sob cargas térmicas, hídricas e mecânicas é complexo e repleto de ocasiões para erros. Neste capítulo vamos discutir um procedimento sistemático para calcular os alongamentos totais de lâminas embutidas em laminados cilíndricos submetidos a tensões de membrana.

O protocolo que segue vale apenas para calcular alongamentos totais de laminados cilíndricos submetidos a tensões de membrana. Esses laminados mantem a geometria circular, tornando os alongamentos térmicos, hídricos e mecânicos independentes das matrizes [B] e [D]. A manutenção da circularidade introduz uma enorme simplificação nos cálculos de laminados cilíndricos. Mas, apesar dessa simplificação, o cálculo dos alongamentos totais de cilindros em todas as lâminas em todas as direções requer muita paciência e atenção. Para facilitar a apresentação, o protocolo será desenvolvido separadamente para alongamentos térmicos, hídricos e mecânicos. O leitor vai perceber que os procedimentos para calcular esses alongamentos são praticamente idênticos e que as pequenas diferenças entre eles são óbvias e intuitivas.

Vamos iniciar pelos alongamentos térmicos.

3 – Alongamentos residuais térmicos – Os laminados de compósitos são formados na temperatura ambiente RT, combinando lâminas de fibras com resina líquida. A resina libera calor ao curar, aquecendo o laminado até a temperatura de pico (PT). Nessa temperatura, a resina solidifica sem que as lâminas exerçam qualquer esforço umas nas outras. Na temperatura de pico PT as lâminas curam, sendo “congeladas” ou “fixadas” no laminado sem interagir umas com as outras. Na temperatura de pico, PT, as lâminas são livres de tensões. As forças residuais surgem quando o laminado esfria e as lâminas encolhem coladas umas nas outras, sem liberdade para assumir suas dimensões naturais. As lâminas embutidas em laminados encolhem igualmente e por isso exercem forças umas nas outras. Na posição de equilíbrio, algumas ficam tracionadas e outras comprimidas. A soma das forças exercidas pelas lâminas umas nas outras (umas tracionadas, outras comprimidas) é igual a zero.

Os alongamentos residuais térmicos são calculados pelo protocolo:

1. *Cálculo da matriz [A] do laminado no sistema global x – y*
2. *Cálculo das resultantes térmicas [N^T] do laminado no sistema global x – y*
3. *Cálculo dos alongamentos térmicos de equilíbrio no sistema global x – y*
4. *Rotação dos alongamentos de equilíbrio para os sistemas 1 – 2 de cada lâmina*
5. *Cálculo dos alongamentos residuais nos sistemas 1 – 2 de cada lâmina.*

Vamos aplicar esse protocolo.

A matriz de rigidez [A] do laminado é calculada somando as contribuições de todas as lâminas.

$$[A] = [A]_{pic} + [A]_{areia} + [A]_{tec} + [A]_r + [A]_{UD}$$

As matrizes de rigidez das lâminas no sistema global foram calculadas e tabeladas no capítulo 6.

A resultante térmica [N^T] do laminado é computada somando as contribuições de todas as lâminas

$$[N^T] = [N^T]_R + [N^T]_{pic} + [N^T]_{tec} + [N^T]_{areia} + [N^T]_{UD}$$

As forças térmicas das lâminas no sistema global foram calculadas e tabeladas no capítulo 6.

Os alongamentos térmicos de equilíbrio para laminados cilíndricos, onde a circularidade é mantida, são obtidos a partir da matriz de rigidez [A] e das resultantes térmicas.

$$[N^T] = [A] \times [\epsilon^e]$$

Os alongamentos de equilíbrio são obtidos resolvendo as equações

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nessas equações, o sobrescrito “e” indica alongamentos de equilíbrio, isto é, aqueles que o laminado (e as lâminas) assume ao passar da temperatura de pico PT para a temperatura

de trabalho OT. A figura 2 mostra as dimensões das lâminas na temperatura de pico e as dimensões que elas teriam se contraíssem livremente ao esfriar. Na temperatura PT as lâminas não são submetidas a tensões. Porém, quando o laminado esfria, elas sofrem tensões residuais. Isso acontece porque as lâminas embutidas em laminados não contraem livremente, sendo forçadas a assumir o mesmo alongamento de equilíbrio na temperatura de trabalho OT. A figura 1 mostra que os alongamentos de equilíbrio são medidos tomando como referência a dimensão do laminado (e das lâminas) na temperatura PT. Os alongamentos de equilíbrio são negativos, porque os laminados encolhem ao esfriar de PT para OT.

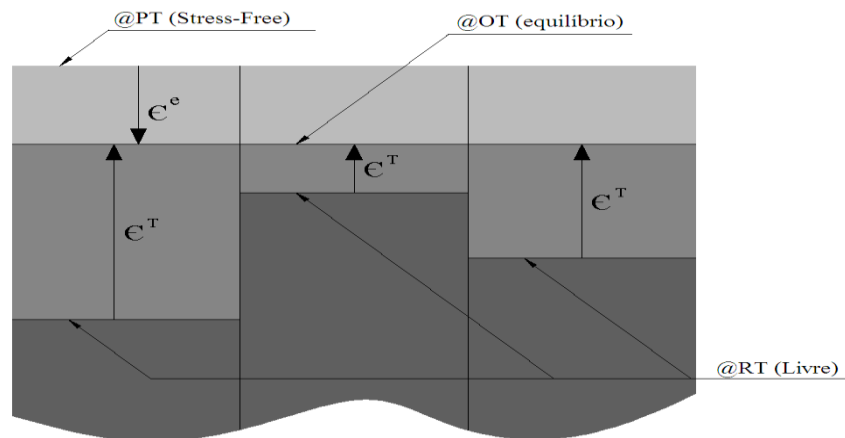


Figura 2

Para obter o alongamento térmico na temperatura OT é preciso subtrair do encolhimento de equilíbrio aquele que a lâmina teria se contraísse livremente da temperatura de pico PT até a temperatura de trabalho OT.

Quando a circularidade é mantida, as lâminas são submetidas aos mesmos alongamentos de equilíbrio que o laminado, referidos ao sistema global $x - y$. Esses alongamentos globais precisam ser girados para os sistemas locais 1 – 2 de cada lâmina.

A rotação dos alongamentos térmicos de equilíbrio transfere os alongamentos do sistema global $x - y$ para os sistemas locais 1 – 2 de cada lâmina. Essa rotação precisa ser feita apenas para as lâminas unidirecionais. A rotação é feita através da matriz $[T]$.

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

Onde m é o cosseno e n é o seno do ângulo entre a direção “ x ” do sistema global e a direção “1” do sistema local da lâmina UD. Os alongamentos térmicos de equilíbrio das lâminas UD no sistema local 1 – 2 são:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ 1/2 \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos térmicos residuais de cada lâmina são obtidos subtraindo dos de equilíbrio aqueles que ela teria se deformasse livremente ao passar de PT para OT.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^e - \alpha_1(OT - PT) \\ \epsilon_2^e - \alpha_2(OT - PT) \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}$$

Os alongamentos residuais (sobrescrito “r”) existem porque as lâminas embutidas em laminados são impedidas de assumir suas dimensões naturais ao passar de PT para OT. Os alongamentos residuais computados assim tomam como referência as dimensões da lâmina na temperatura de trabalho OT. Eles podem ser negativos ou positivos, dependendo do coeficiente de dilatação térmica de cada lâmina.

4 – Alongamentos hídricos residuais – O protocolo para calcular os alongamentos hídricos residuais é idêntico ao usado para o caso térmico. As únicas diferenças são (a) a troca dos coeficientes de dilatação térmica pelos correspondentes hídricos e (b) a substituição da variação de temperatura OT – PT pela quantidade de água absorvida pela resina, Δm . Fora isso, os dois protocolos são idênticos.

Aplicando o protocolo com as devidas substituições, obtemos

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^e - \beta_1 \Delta m \\ \epsilon_2^e - \beta_2 \Delta m \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}$$

5 – Alongamentos mecânicos – O protocolo para calcular os alongamentos mecânicos difere ligeiramente dos usados para calcular os residuais térmicos e hídricos, porque para as cargas mecânicas não existem tensões residuais nem coeficientes de dilatação.

O protocolo de cálculo para os alongamentos mecânicos é:

1. *Cálculo da matriz [A] no sistema global x – y.*
2. *As forças mecânicas externas são conhecidas no sistema global x – y*
3. *Cálculo dos alongamentos mecânicos de equilíbrio no sistema global x – y*
4. *Rotação dos alongamentos de equilíbrio para o sistema 1 – 2*

A matriz [A] no sistema global x – y é calculada da maneira usual.

$$[A] = [A]_R + [A]_P + [A]_T + [A]_A + [A]_{UD}$$

As matrizes das lâminas no sistema global foram deduzidas e tabeladas no capítulo 6

As resultantes mecânicas são as forças externas aplicadas no laminado. Elas fazem parte dos dados do problema e devem ser conhecidas.

Os alongamentos mecânicos no sistema x – y são calculados usando as resultantes mecânicas, da mesma maneira que fizemos para os alongamentos térmicos e os hídricos.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ N_{xy}^M \end{bmatrix}$$

Ao contrário dos carregamentos térmicos e hídricos, os mecânicos podem conter torques externos, de modo que o alongamento mecânico de cisalhamento no sistema global pode ser diferente de zero. A manutenção da circularidade assegura que os alongamentos mecânicos do laminado são iguais aos das lâminas no sistema x - y.

Os alongamentos mecânicos das lâminas UD devem ser girados para o sistema local 1 – 2 pelo procedimento usual.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = [T] \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Os exemplos numéricos que seguem ilustram os protocolos de cálculo para os alongamentos residuais e mecânicos.

Exemplo 1. Computar os alongamentos totais nas lâminas de um laminado UD55 curado na temperatura de pico $PT = 100C$ e trabalhando na temperatura $OT = 40C$. A absorção de água pela resina é $\Delta m = 0,01$. As forças mecânicas são $N_x = 250 \text{ kg/cm}$ e $N_y = 500 \text{ kg/cm}$. A construção do laminado é como segue:

Espessura da lâmina de resina $t_r = 0,6 \text{ mm}$
 Espessura da barreira de corrosão $t_{pic} = 2,1 \text{ mm}$
 Espessura das lâminas UD55 $t_{UD} = 7,3 \text{ mm}$

A matriz de rigidez desse laminado é

$$[A] = [A]_{pic} + [A]_{UD} + [A]_r$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t_{pic} + \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times t_{UD}$$

$$+ \begin{bmatrix} 33\ 000 & 10\ 000 & 0 \\ 10\ 000 & 33\ 000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\ 500 \end{bmatrix} \times t_r$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times 0,21 + \begin{bmatrix} 132470 & 92220 & 0 \\ 92220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times 0,73$$

$$+ \begin{bmatrix} 33\,000 & 10\,000 & 0 \\ 10\,000 & 33\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 11\,500 \end{bmatrix} \times 0,06$$

Desenvolvendo os cálculos, obtemos

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114850 & 72750 & 0 \\ 72750 & 189750 & 0 \\ 0 & 0 & 80250 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As resultantes térmicas desse laminado são

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,80 \\ 11,01 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,73 \times (OT - PT) + \begin{bmatrix} 2,58 \\ 2,58 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,06 \times (OT - PT) + \begin{bmatrix} 2,50 \\ 2,50 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,21 \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,37 \\ 8,82 \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,37 \\ 8,82 \\ 0 \end{bmatrix} \times (40 - 100)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 382,2 \\ 529,2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As resultantes térmicas são negativas, porque o laminado encolhe ao esfriar de $PT = 100\text{ C}$ para $OT = 40\text{ C}$.

As resultantes hídricas desse laminado são

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30000 \\ 40000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,73 \times \Delta m + \begin{bmatrix} 19000 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,21 \times \Delta m + \begin{bmatrix} 17000 \\ 17000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,06 \times \Delta m$$

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27000 \\ 34000 \\ 0 \end{bmatrix} \times \Delta m$$

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27000 \\ 34000 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,01$$

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 340 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As resultantes hídricas são positivas, porque o laminado expande ao absorver água.

Os alongamentos térmicos de equilíbrio no sistema global são

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -382,2 \\ -529,2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114850 & 72750 & 0 \\ 72750 & 189750 & 0 \\ 0 & 0 & 80250 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo essas equações, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,002 \\ -0,002 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos térmicos de equilíbrio das lâminas UD55 nos sistemas locais são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ 1/2 \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ 1/2 \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,57^2 & 0,82^2 & 2 \times 0,57 \times 0,82 \\ 0,82^2 & 0,57^2 & -2 \times 0,57 \times 0,82 \\ -0,57 \times 0,82 & 0,57 \times 0,82 & 0,57^2 - 0,82^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,002 \\ -0,002 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,002 \\ -0,002 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No caso analisado, os alongamentos térmicos de equilíbrio no sistema local das lâminas UD55 são iguais aos alongamentos no sistema global. Isso é uma enorme coincidência.

Os alongamentos residuais térmicos para as lâminas UD55 são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^e - \alpha_1(OT - PT) \\ \epsilon_2^e - \alpha_2(OT - PT) \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,002 - 7,5 \times 10^{-6}(40 - 100) \\ -0,002 - 45,0 \times 10^{-6}(40 - 100) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0016 \\ 0,0007 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para lâminas de fibras picadas não é necessário fazer rotação e os alongamentos térmicos residuais são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,002 - 25,0 \times 10^{-6}(40 - 100) \\ -0,002 - 25,0 \times 10^{-6}(40 - 100) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0005 \\ -0,0005 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos computar os alongamentos hídricos residuais. Os alongamentos hídricos de equilíbrio no sistema global são

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 210 \\ 340 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114850 & 72750 & 0 \\ 72750 & 189750 & 0 \\ 0 & 0 & 80250 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo essas equações, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0009 \\ 0,0014 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos hídricos de equilíbrio das lâminas UD55 nos sistemas locais são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ 1/2 \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ 1/2 \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,57^2 & 0,82^2 & 2 \times 0,57 \times 0,82 \\ 0,82^2 & 0,57^2 & -2 \times 0,57 \times 0,82 \\ -0,57 \times 0,82 & 0,57 \times 0,82 & 0,57^2 - 0,82^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,0009 \\ 0,0014 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^e \\ \epsilon_2^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0012 \\ 0,0011 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos hídricos residuais para as lâminas UD55 nos sistemas locais são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^e - \beta_1 \Delta m \\ \epsilon_2^e - \beta_2 \Delta m \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0012 - 0,04 \times 0,01 \\ 0,0011 - 0,18 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0008 \\ -0,0007 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para lâminas de fibras picadas não é necessário fazer rotação e os alongamentos hídricos residuais são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^r \\ \epsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0009 - 0,19 \times 0,01 \\ 0,0014 - 0,19 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0054 \\ -0,0005 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos mecânicos no sistema global são

$$\begin{bmatrix} 250 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114850 & 72750 & 0 \\ 72750 & 189750 & 0 \\ 0 & 0 & 80250 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0007 \\ 0,0024 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para as lâminas UD55 no sistema local os alongamentos mecânicos são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^M \\ \epsilon_2^M \\ 1/2 \gamma_{12}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,57^2 & 0,82^2 & 2 \times 0,57 \times 0,82 \\ 0,82^2 & 0,57^2 & -2 \times 0,57 \times 0,82 \\ -0,57 \times 0,82 & 0,57 \times 0,82 & 0,57^2 - 0,82^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,0007 \\ 0,0024 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^M \\ \epsilon_2^M \\ \gamma_{12}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0013 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos totais (térmicos, hídricos e mecânicos) das lâminas desse laminado são mostrados abaixo.

Para as lâminas UD55

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^{total} \\ \epsilon_2^{total} \\ \gamma_{12}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0016 \\ 0,0007 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0008 \\ -0,0007 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0013 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10\% \\ 0,13\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para as lâminas de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^{total} \\ \epsilon_2^{total} \\ \gamma_{12}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0005 \\ -0,0005 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0054 \\ -0,0005 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0007 \\ 0,0024 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,52\% \\ 0,14\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos totais da lâmina crítica devem ser comparados com os admissíveis. A espessura do laminado é determinada quando a condição acima é satisfeita. Esse é o critério de cálculo estrutural de compósitos para curto prazo. Como vemos, ele é baseado nos alongamentos totais.

Capítulo 9

Reabilitação de estruturas metálicas

Lei das misturas matricial

1 – Introdução. Neste capítulo vamos aplicar a lei das misturas matricial no dimensionamento de reforços de compósito para reabilitar estruturas metálicas danificadas em uso ou com defeitos de fabricação. A lei das misturas matricial leva em conta as interações entre o reforço e o substrato, dando respostas exatas ao problema. Mas, por usar matrizes, ela não é apreciada por alguns engenheiros que preferem usar a lei das misturas unidimensional. O método de análise baseado na lei das misturas unidimensional é apresentado no capítulo seguinte.

Para dimensionar os reforços, é necessário conhecer o ponto de escoamento do substrato, a temperatura de trabalho (OT), a espessura residual do substrato (t_s) e as forças mecânicas externas $[N_x^M \ N_y^M \ N_{xy}^M]$ atuantes na estrutura. As propriedades do substrato e do reforço estrutural são conhecidas.

Existem três critérios para dimensionar os reforços estruturais de compósitos.

1. **Critério de rigidez mínima.** O reforço estrutural é dimensionado para restaurar a rigidez mínima do equipamento, suficiente para manter os alongamentos do substrato no ponto de escoamento nas direções x e y . Esse é o critério adotado nas normas ASME PCC-2 e ISO/FDIS 24817.
2. **Critério de rigidez nominal.** O reforço estrutural é dimensionado para restaurar a rigidez nominal do equipamento, determinada pela espessura especificada em normas. Ao controlar a rigidez nominal, os alongamentos do substrato ficam abaixo do ponto de

escoamento nas direções x e y . Esse critério requer o conhecimento das espessuras mínimas exigidas em normas.

3. **Critério de rigidez plena.** O reforço estrutural é dimensionado para restaurar a rigidez plena do equipamento, definida pela sua espessura original. Esse critério restaura a rigidez original do equipamento nas direções y e x , sem levar em conta espessuras mínimas ou nominais. A restauração plena da rigidez é usada para dimensionar reforços de danos passantes, onde a espessura residual do substrato é nula.

Deve ser notado que o parâmetro determinante da espessura mínima do reforço é o ponto de escoamento do substrato. Isso é assim, porque os alongamentos admissíveis para os reforços, feitos com fibras de vidro ou de carbono, são muito superiores ao ponto de escoamento de substratos de aço (0,10%). Sendo superiores ao ponto de escoamento do aço, os alongamentos admissíveis para os reforços são irrelevantes. Independente do critério de cálculo, os alongamentos totais do substrato metálico não podem exceder seu ponto de escoamento.

O método para dimensionar reforços estruturais é o mesmo usado para analisar laminados de compósitos. Nada existe de diferente. Os protocolos de cálculo consideram os substratos metálicos como lâminas de propriedades conhecidas. Essa afirmação ficará evidente ao longo deste capítulo.

2 – Matrizes de rigidez. Nesta seção vamos desenvolver as matrizes de rigidez do sistema substrato-reforço $[A]$ e do laminado de reforço $[A_r]$. Como dissemos, para calcular a matriz de rigidez do sistema substrato-reforço, o substrato é modelado como lâmina metálica de propriedades conhecidas.

A matriz de rigidez do sistema é obtida somando as matrizes de todas as lâminas

$$[A] = [A]_s + [A]_{pic} + [A]_{tec} + [A]_{UD} + [A]_{areia}$$

Observe que a matriz do substrato, $[A_s]$, é somada às matrizes das lâminas de reforço. Os reforços usados para reabilitar estruturas metálicas usam apenas lâminas UD orientadas nas direções globais x e y , de modo que a equação acima pode ser simplificada para

$$[A] = [A]_s + [A]_{ry} + [A]_{rx}$$

Como vemos, a matriz de rigidez do sistema substrato-reforço é obtida somando três matrizes, uma do substrato e duas do laminado de reforço. A tabela 1 mostra as propriedades de lâminas de aço, de fibras de vidro e de fibras de carbono. Essas propriedades são usadas para calcular as matrizes do sistema substrato-reforço.

Propriedade	Fibras de vidro UD	Fibras de carbono UD	Aço
Teor por peso	0,70	0,60	-----
Teor volumétrico	0,50	0,50	-----
E_x (kg/cm ²)	100 000	80 000	2 100 000
E_y (kg/cm ²)	400 000	1 000 000	2 100 000
G_{xy} (kg/cm ²)	35 000	60 000	840 000
Escoamento	-----	-----	0,10%
ν_{yx}	0,30	0,30	0,25

ν_{xy}	0,08	0,02	0,25
$\alpha_x (1/C)$	$45,0 \times 10^{-6}$	$30,0 \times 10^{-6}$	$13,0 \times 10^{-6}$
$\alpha_y (1/C)$	$7,5 \times 10^{-6}$	$-1,0 \times 10^{-6}$	$13,0 \times 10^{-6}$
$\beta_x (1/g)$	0,18	0,07	-----
$\beta_y (1/g)$	0,04	0,02	-----

Tabela 1
Propriedades das lâminas de compósitos e do substrato de aço

Usando as propriedades da tabela 1, a matriz de rigidez do sistema aço reforçado com fibras de vidro é

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} \\ + \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Notar a enorme diferença entre a matriz de elasticidade do substrato de aço e as do reforço de fibras de vidro UD.

A matriz de rigidez do sistema aço com reforço de fibras de carbono é

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} \\ + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Nas equações acima

t_s é a espessura residual do substrato

t_{ry} é a espessura do laminado de reforço com as fibras na direção circunferencial y

t_{rx} é a espessura do laminado de reforço com as fibras na direção axial x

A matriz de rigidez do laminado de reforço é, por definição

$$[A]_r = [A]_{ry} + [A]_{rx}$$

Para reforços com fibras de vidro, temos

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Para reforços com fibras de carbono

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

3. Coeficientes de dilatação térmica. Nesta seção vamos computar os coeficientes de dilatação térmica do sistema substrato-reforço e do laminado de reforço. Esses coeficientes são necessários para determinar os alongamentos residuais.

Os coeficientes de dilatação térmica são obtidos pelas relações

Para o sistema substrato e reforço

$$[A]_s \times [\alpha]_s + [A]_{ry} \times [\alpha]_{ry} + [A]_{rx} \times [\alpha]_{rx} = [A] \times [\alpha]$$

Para o reforço

$$[A]_{ry} \times [\alpha]_{ry} + [A]_{rx} \times [\alpha]_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$$

Desenvolvendo essas equações para reforços com fibras de vidro, temos

Para o substrato de aço

$$[A]_s \times [\alpha]_s = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s \times \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s$$

Para as lâminas de fibras de vidro orientadas na direção y

$$[A]_{ry} \times [\alpha]_{ry} = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} = \begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

Para as lâminas de fibras de vidro orientadas na direção x

$$[A]_{rx} \times [\alpha]_{rx} = \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7,5 \times 10^{-6} \\ 45,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Entrado esses valores nas equações para calcular os coeficientes de dilatação térmica, obtemos

Para o sistema

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$$

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$$

Os coeficientes de dilatação térmica do sistema substrato-reforço e do laminado de fibras de vidro são computados pelas equações acima.

Mutatis mutandis, os coeficientes de dilatação térmica para reforços com fibras de carbono, são

Para as lâminas de fibras de carbono orientadas na direção y

$$[A]_{ry} \times [\alpha]_{ry} = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 30,0 \times 10^{-6} \\ -1,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} = \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

Para as lâminas de fibras de carbono orientadas na direção x

$$[A]_{rx} \times [\alpha]_{rx} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1,0 \times 10^{-6} \\ 30,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Entrado esses valores nas equações para calcular os coeficientes de dilatação, obtemos

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$$

$$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$$

Essas equações computam os coeficientes de dilatação térmica do laminado de reforço e do sistema substrato-reforço para fibras de carbono.

4. Alongamentos térmicos residuais. Os alongamentos térmicos residuais são computados pelas expressões

Para o laminado de reforço

$$[\epsilon^r]_r = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_r \times (OT - PT)$$

Para o substrato

$$[\epsilon^r]_s = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_s \times (OT - RT)$$

Nas equações acima, os coeficientes de dilatação térmica “alfa” do substrato e do laminado de reforço são conhecidos. E os do sistema substrato-reforço são calculados.

5. Alongamentos hídricos residuais. Os alongamentos hídricos residuais são computados pelo mesmo protocolo, considerando que substratos metálicos não absorvem água.

Os alongamentos hídricos residuais são obtidos pelas relações

Para o laminado de reforço

$$[\epsilon^r]_r = [\beta] \times \Delta m - [\beta]_r \times \Delta m$$

Para o substrato

$$[\epsilon^r]_s = [\beta] \times \Delta m$$

Nas equações acima, Δm é a quantidade de água absorvida pela resina. Os coeficientes de dilatação hídrica “beta” do laminado de reforço e do sistema substrato-reforço são computados por protocolo semelhante ao usado para o caso de dilatação térmica.

Para o sistema

$$[A]_s \times [\beta]_s + [A]_{ry} \times [\beta]_{ry} + [A]_{rx} \times [\beta]_{rx} = [A] \times [\beta]$$

Para o reforço

$$[A]_{ry} \times [\beta]_{ry} + [A]_{rx} \times [\beta]_{rx} = [A]_r \times [\beta]_r$$

Desenvolvendo essas equações para reforços com fibras de vidro, temos

Para o substrato

$$[A]_s \times [\beta]_s = 0$$

Para as lâminas de fibras de vidro orientadas na direção y

$$[A]_{ry} \times [\beta]_{ry} = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,18 \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} = \begin{bmatrix} 19000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

Para as lâminas de fibras de vidro orientadas na direção x

$$[A]_{rx} \times [\beta]_{rx} = \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,18 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = \begin{bmatrix} 21500 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Entrado esses valores nas equações para calcular os coeficientes de dilatação hídrica, obtemos

Para o sistema substrato-reforço

$$\begin{bmatrix} 19000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 21500 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\beta]$$

Para o laminado de fibras de vidro

$$\begin{bmatrix} 19000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 21500 \\ 19000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\beta]_r$$

Os coeficientes de dilatação hídrica do sistema substrato-reforço e do laminado de fibras de vidro são computados pelas equações acima.

Mutatis mutandis, os coeficientes de dilatação hídrica para reforços com fibras de carbono, são

Para as lâminas de fibras de carbono orientadas na direção y

$$[A]_{ry} \times [\beta]_{ry} = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,07 \\ 0,02 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

Para as lâminas de fibras de carbono orientadas na direção x

$$[A]_{rx} \times [\beta]_{rx} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,07 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = \begin{bmatrix} 21500 \\ 6000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Entrado esses valores nas equações para calcular os coeficientes de dilatação hídrica, obtemos

Para o sistema substrato-reforço

$$\begin{bmatrix} 6000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 21500 \\ 6000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\beta]$$

Para o laminado de reforço com fibras de carbono

$$\begin{bmatrix} 6000 \\ 21500 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 21500 \\ 6000 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\beta]_r$$

Os coeficientes de dilatação hídrica do sistema substrato-reforço e do laminado de fibras de carbono são computados pelas equações acima.

6. Alongamentos mecânicos. Os alongamentos mecânicos do sistema são computados usando a lei de Hooke em formato matricial

$$[A] \times [\epsilon^M] = [N^M]$$

Onde

$[A]$ é a matriz de rigidez do sistema aço com o reforço

$[\epsilon^M]$ é a matriz de alongamentos mecânicos

$[N^M]$ é a matriz de forças mecânicas externas

A matriz de rigidez do sistema é computada como mostrado acima. A matriz de forças externas faz parte dos dados do problema, sendo sempre conhecida. Dessa maneira, computamos os alongamentos mecânicos do sistema.

Para facilitar a leitura, essas matrizes são agrupadas nas tabelas 2 e 3.

Reforço com fibras de vidro	
<i>Matriz de rigidez do sistema</i>	
$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry}$ $+ \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$	
<i>Matriz de rigidez do reforço</i>	
$[A]_r = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$	
<i>Coefficientes de dilatação térmica do sistema</i>	
$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$	
<i>Coefficientes de dilatação térmica do reforço</i>	
$\begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$	
<i>Alongamentos residuais do substrato</i>	
$[\epsilon^r]_s = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_s \times (OT - RT)$	
<i>Alongamentos residuais do reforço</i>	
$[\epsilon^r]_r = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_r \times (OT - PT)$	
<i>Alongamentos mecânicos</i>	
$[A] \times [\epsilon^M] = [N^M]$	

Tabela 2

Matrizes para sistemas com fibras de vidro

<i>Reforço com fibras de carbono</i>		
<i>Matriz de rigidez do sistema</i>		
$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry}$ $+ \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$		
<i>Matriz de rigidez do reforço</i>		
$[A]_r = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$		
<i>Coefficientes de dilatação térmica do sistema</i>		
$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$		
<i>Coefficientes de dilatação térmica do reforço</i>		
$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$		
<i>Alongamentos residuais do substrato</i>		
$[\epsilon^r]_s = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_s \times (OT - RT)$		
<i>Alongamentos residuais do reforço</i>		
$[\epsilon^r]_r = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_r \times (OT - PT)$		
<i>Alongamentos mecânicos</i>		
$[A] \times [\epsilon^M] = [N^M]$		

Tabela 3
Matrizes para sistemas com fibras de carbono

Exemplo 1. Suponhamos um reservatório de aço, vertical e cilíndrico, armazenando água na temperatura ambiente $OT = RT = 25C$. Uma das chapas inferiores do costado, distante 12,0 m do topo e submetida à pressão hidrostática $P = 1,2 \text{ kg/cm}^2$, sofreu intensa corrosão e teve sua espessura reduzida do valor especificado em norma, 3,1 mm, para 1,6 mm. Vamos dimensionar o laminado de fibras de vidro para restaurar a capacidade estrutural da chapa danificada.

São dados:

$D = 10\,000 \text{ mm}$ (diâmetro do tanque)

$H = 12\,000 \text{ mm}$ (distância ao topo da chapa a ser restaurada)

$P = 1,2 \text{ kg/cm}^2$ (pressão hidrostática na chapa a ser restaurada)

$OT = RT = 25C$

$PT = 45C$ (temperatura de cura da resina)

$t = 3,1 \text{ mm}$ (espessura nominal da chapa)

$t_s = 1,6 \text{ mm}$ (espessura residual da chapa corroída)

$\Delta m = 0$ (revestimento externo, sem contato com água)

$N_x^M = 0$ (não existe força axial no tanque)

$N_y^M = 600 \text{ kg/cm}$ (força circunferencial na chapa inferior do costado)

$N_{xy}^M = 0$ (não existe torque)

O dimensionamento do reforço será feito pelo critério de rigidez mínima. Vamos, então, dimensionar a espessura mínima do reforço estrutural externo, de fibras de vidro, para manter o alongamento no sistema tanque-reforço abaixo do ponto de escoamento do aço.

Passo 1. A matriz de rigidez do sistema é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times 0,16 + \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

$$+ \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Para computar a matriz de rigidez do sistema, é necessário conhecer as espessuras do reforço nas direções axial e circunferencial. Mas, essas são exatamente nossas incógnitas. Problemas assim são resolvidos por tentativas, arbitrando espessuras para os laminados de reforço e verificando se elas satisfazem as condições do problema.

Vamos iniciar nossas tentativas observando que não existe esforço axial externo no tanque. Nesse caso, podemos fazer $t_{rx} = 0$.

Quanto à espessura do reforço na direção circunferencial, vamos supor $t_{ry} = 5 \times 1,26 \approx 6,5 \text{ mm}$. Essa escolha pode ser justificada considerando que a espessura de chapas de aço para resistir à força $N_y^M = 600 \text{ kg/cm}$ é

$$t = \frac{600}{2100000 \times 0,001} = 0,286 \text{ cm} = 2,86 \text{ mm}$$

Lembrando que a espessura residual da chapa corroída é $t_s = 1,6 \text{ mm}$, o déficit de espessura é $2,86 - 1,6 = 1,26 \text{ mm}$. Lembrando também que a relação entre os módulos do aço e das lâminas UD na direção das fibras é $2\,100\,000/400\,000 \approx 5$, podemos esperar que a espessura do reforço na direção circunferencial

seja cerca de 5 vezes o déficit de espessura medido na chapa de aço. Portanto, vamos arbitrar $t_{ry} = 5 \times 1,26 \approx 6,5 \text{ mm}$.

Entrando esses valores na equação da matriz $[A]$, obtemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times 0,16 + \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times 0,65$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 423\,000 & 109\,000 & 0 \\ 109\,000 & 618\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 157\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Passo 2. A matriz de rigidez do reforço com fibras de vidro é

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 400\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times 0,65$$

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 65\,000 & 19\,500 & 0 \\ 19\,500 & 260\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 22\,750 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Passo 3. Os coeficientes de dilatação térmica do sistema substrato-reforço, são

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$$

Fazendo as devidas substituições na equação acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,16 + \begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,65 + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix} 423\,000 & 109\,000 & 0 \\ 109\,000 & 618\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 157\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8,55 \\ 8,65 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 423\,000 & 109\,000 & 0 \\ 109\,000 & 618\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 157\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação térmica do sistema são obtidos resolvendo essa equação

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,4 \times 10^{-6} \\ 10,9 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4. Os coeficientes de dilatação térmica do reforço de fibras de vidro, são

$$\begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{bmatrix} 4,72 \\ 4,35 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,65 + \begin{bmatrix} 4,35 \\ 4,72 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix} 65\,000 & 19\,500 & 0 \\ 19\,500 & 260\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 22750 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r$$

$$\begin{bmatrix} 3,07 \\ 2,83 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65\,000 & 19\,500 & 0 \\ 19\,500 & 260\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 22750 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r$$

Os coeficientes de dilatação térmica do laminado de reforço são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5. Alongamentos residuais do substrato

$$[\epsilon^r]_s = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_s \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_s \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 17,4 \times 10^{-6} \\ 10,9 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_s \times (OT - RT)$$

Entrando nessa equação os valores $OT = RT = 25C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Passo 6. Alongamentos residuais do laminado de reforço

$$[\epsilon^r]_r = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_r \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 17,4 \times 10^{-6} \\ 10,9 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_r \times (OT - PT)$$

Entrando nessa equação os valores $OT = RT = 25C$ e $PT = 45C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 0,09\% \\ 0,02\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Passo 7. Alongamentos mecânicos do sistema

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 423000 & 109000 & 0 \\ 109000 & 618000 & 0 \\ 0 & 0 & 157000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

Onde as forças mecânicas externas são

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 423000 & 109000 & 0 \\ 109000 & 618000 & 0 \\ 0 & 0 & 157000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

De onde obtemos os alongamentos mecânicos do sistema substrato-reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 8. Os alongamentos totais são computados somando os mecânicos com os residuais

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,09\% \\ 0,02\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,12\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que o alongamento total do substrato, na direção circunferencial, é igual ao ponto de escoamento do aço, 0,10%. Portanto, o laminado de reforço arbitrado, com espessura 6,5 mm de fibras de vidro UD orientado na direção circunferencial do cilindro, atende o critério de rigidez mínima.

Passo 9. Resta determinar as larguras das faixas de ancoragem que colam o reforço no costado. Para isso é necessário conhecer as forças totais N_x e N_y que tracionam o reforço nas direções axial e circunferencial. Essas forças são obtidas pela lei de Hooke, multiplicando a matriz de rigidez do laminado pelos alongamentos totais

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\,000 & 30\,000 & 0 \\ 30\,000 & 400\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \times 0,65 \times \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,12\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63,0 \\ 325,0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Vimos no enunciado do problema, que as forças mecânicas atuantes no costado são

$N_x^M = 0$ (não existe força axial no tanque)

$N_y^M = 600 \text{ kg/cm}$ (força circunferencial na chapa inferior do costado)

A força $N_y^M = 600 \text{ kg/cm}$ é distribuída, 325 kg/cm indo para o reforço e o restante permanecendo no substrato de aço. Isso está de acordo com os cálculos anteriores e não oferece problemas.

As larguras das faixas de colagem do reforço ao substrato de aço devem ser

$$\Delta y = \frac{N_y \times CS}{140}$$

$$\Delta y = \frac{325 \times 10}{140} = 23 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{63 \times 10}{140} = 5 \text{ cm}$$

Exemplo 2. Repetir o problema anterior para reforço com fibras de carbono.

Os dados do problema são os mesmos

$D = 10\,000 \text{ mm}$

$H = 12\,000 \text{ mm}$

$P = 1,2 \text{ kg/cm}^2$ é a pressão na chapa inferior do costado

$OT = RT = 25\text{C}$

$PT = 45\text{C}$ (temperatura de cura da resina)

$t = 3,1 \text{ mm}$ (espessura nominal da chapa corroída)

$t_s = 1,6 \text{ mm}$ (espessura residual da chapa corroída)

$\Delta m = 0$ (revestimento externo, sem contato com água)

$N_x^M = 0$ (não existe força axial no tanque)

$N_y^M = 600 \text{ kg/cm}$ (força circunferencial na chapa inferior)

$N_{xy}^M = 0$ (não existe torque)

Passo 1. A matriz de rigidez do sistema com reforço de fibras de carbono é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Como não existe esforço axial externo no tanque, podemos assumir $t_{rx} = 0$.

Quanto à espessura do reforço na direção circunferencial, vamos supor $t_{ry} = 2,1 \times 1,26 \approx 3,0 \text{ mm}$. Essa espessura pode ser justificada considerando que a espessura da chapa de aço para resistir à pressão hidrostática é

$$t = \frac{600}{2100000 \times 0,001} = 0,286 \text{ cm} = 2,86 \text{ mm}$$

Lembrando que a espessura residual da chapa corroída é $t_s = 1,6$ mm, o déficit de espessura é $2,86 - 1,6 = 1,26$ mm. Lembrando também que a relação entre os módulos do aço e das lâminas UD na direção das fibras é $2\,100\,000/1\,000\,000 = 2,1$, podemos esperar que a espessura do reforço na direção circunferencial seja cerca de 2,1 vezes o déficit de espessura medido na chapa de aço. Portanto, vamos arbitrar como primeira tentativa, $t_{ry} = 3,0$ mm.

Entrando esses valores na equação da matriz $[A]$, obtemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times 0,16 + \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,30$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 382\,000 & 96\,000 & 0 \\ 96\,000 & 658\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 152\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Passo 2. A matriz de rigidez do reforço com fibras de carbono é

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,30$$

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 24\,000 & 6900 & 0 \\ 6900 & 300\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 18000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Passo 3. Os coeficientes de dilatação térmica do sistema substrato-reforço, são

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$$

Fazendo as devidas substituições na equação acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,16 + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,30 + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix} 382\,000 & 96\,000 & 0 \\ 96\,000 & 658\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 152\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6,54 \\ 5,73 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 382\,000 & 96\,000 & 0 \\ 96\,000 & 658\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 152\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação térmica do sistema com fibras de carbono são obtidos resolvendo essa equação

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,50 \times 10^{-6} \\ 6,45 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4. Os coeficientes de dilatação térmica do reforço de fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,30 + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = [A]_r \times [\alpha]_r$$

$$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,30 + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix} 24\,000 & 6900 & 0 \\ 6900 & 300\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 18000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r$$

$$\begin{bmatrix} 0,71 \\ -0,09 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24\,000 & 6900 & 0 \\ 6900 & 300\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 18000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r$$

Os coeficientes de dilatação térmica do laminado de reforço com fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 30,0 \times 10^{-6} \\ -1,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5. Alongamentos residuais do substrato

$$[\epsilon^r]_s = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_s \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_s \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 15,50 \times 10^{-6} \\ 6,45 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_s \times (OT - RT)$$

Entrando nessa equação os valores $OT = RT = 25C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Passo 6. Alongamentos residuais do laminado de reforço

$$[\epsilon^r]_r = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_r \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 15,50 \times 10^{-6} \\ 6,45 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 30,0 \times 10^{-6} \\ -1,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_r \times (OT - PT)$$

Entrando nessa equação os valores $OT = RT = 25C$ e $PT = 45C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,00\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Passo 7. Alongamentos mecânicos do sistema

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 382\,000 & 96\,000 & 0 \\ 96\,000 & 658\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 152\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

Onde as forças mecânicas externas são

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 382\,000 & 96\,000 & 0 \\ 96\,000 & 658\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 152\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

De onde obtemos os alongamentos mecânicos do sistema substrato-reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02\% \\ 0,09\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 8. Os alongamentos totais são computados somando os mecânicos com os residuais

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02\% \\ 0,09\% \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02\% \\ 0,09\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02\% \\ 0,09\% \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,00\% \\ 0,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04\% \\ 0,09\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que o alongamento total no substrato, na direção circunferencial, é 10% menor que o ponto de escoamento do aço, 0,10%. Portanto, o laminado escolhido, com espessura 3,0 mm de fibras de carbono UD orientado na direção circunferencial do cilindro, atende de maneira conservadora ao critério de rigidez mínima. A espessura do reforço pode ser reduzida de 3,0 mm para 2,7 mm.

Passo 9. Vamos calcular a largura da faixa de ancoragem, que cola o revestimento no costado. Para isso é necessário conhecer as forças totais N_x e N_y que tracionam o reforço nas direções axial e circunferencial. Essas forças são obtidas pela lei de Hooke, multiplicando a matriz de rigidez do laminado pelos alongamentos totais

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,30 \times \begin{bmatrix} 0,04\% \\ 0,09\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,0 \\ 273,0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As larguras das faixas de colagem do reforço ao substrato de aço devem ser

$$\Delta y = \frac{N_y \times CS}{140}$$

$$\Delta y = \frac{273 \times 10}{140} = 20 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{16 \times 10}{140} = 2 \text{ cm}$$

Exemplo 3. Dimensionar o reforço estrutural para reabilitar um tubo de aço trabalhando em alta temperatura sob a ação de torque e de forças externas nas direções circunferencial e axial. Usar o critério de rigidez mínima.

São dados:

$OT = 80C$ é a temperatura de trabalho

$RT = 25C$ é a temperatura do ambiente

$PT = 45C$ é a temperatura de cura da resina

$\Delta m = 0$ (Reforço externo, sem contato com água)

$t = 6,3 \text{ mm}$ é a espessura nominal do tubo

$t_s = 2,5 \text{ mm}$ é a espessura residual do tubo

$N_y^M = 1000 \text{ kg/cm}$ é a força externa na direção circunferencial

$N_x^M = 800 \text{ kg/cm}$ é a força externa na direção axial

$N_{xy}^M = 300 \text{ kg.cm}$ é o torque externo

O laminado de reforço, feito com fibras de carbono, deve ter rigidez suficiente para manter o alongamento do substrato abaixo do ponto de escoamento 0,10%.

Vamos seguir o protocolo

Passo 1. A matriz de rigidez do sistema é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

Analisando os dados do problema, percebemos que a força externa na direção circunferencial é $1000/800 = 1,25$ vezes a força na direção axial. Por isso, como primeira tentativa, vamos supor $t_{ry} = 1,25 \times t_{rx}$. Além disso, considerando a relação entre os módulos do aço e das lâminas UD de carbono, podemos supor também nessa primeira tentativa $t_{ry} = 2,1 \times (4,8 - 2,5) \text{ mm} \approx 5,0 \text{ mm}$, onde $4,8 \text{ mm}$ é a espessura mínima da chapa de aço para dar ao tubo alongamento igual ao ponto de escoamento, $0,10\%$.

$$t = \frac{N_y}{E_s \times 0,001} = \frac{1000}{2100000 \times 0,001} = 0,48 \text{ cm} = 4,8 \text{ mm}$$

Entrando esses valores na equação da matriz $[A]$, obtemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\,240\,000 & 560\,000 & 0 \\ 560\,000 & 2\,240\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 840\,000 \end{bmatrix} \times 0,25 + \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,50$$

$$+ \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,40$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 161\,000 & 0 \\ 161\,000 & 1\,092\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 264\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Passo 2. A matriz de rigidez do reforço com fibras de carbono é

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx}$$

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,50 + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,40$$

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 440\,000 & 20700 & 0 \\ 20700 & 532\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 54\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Passo 3. Os coeficientes de dilatação térmica do sistema substrato-reforço, são

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_s + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A] \times [\alpha]$$

Fazendo as devidas substituições na equação acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} 36,40 \\ 36,40 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,25 + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,50 + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,40 = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 161\,000 & 0 \\ 161\,000 & 1\,092\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 264\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10,17 \\ 9,90 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 161\,000 & 0 \\ 161\,000 & 1\,092\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 264\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de dilatação térmica do sistema são obtidos resolvendo essa equação

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,92 \times 10^{-6} \\ 7,75 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4. Os coeficientes de dilatação térmica do reforço de fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{ry} + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times t_{rx} = [A]_r \times [\alpha]_r$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2,38 \\ -0,31 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,50 + \begin{bmatrix} -0,31 \\ 2,38 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0,40 = \begin{bmatrix} 440\,000 & 20700 & 0 \\ 20700 & 532\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 54\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r$$

$$\begin{bmatrix} 1,07 \\ 0,80 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440\,000 & 20700 & 0 \\ 20700 & 532\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 54\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r$$

Os coeficientes de dilatação térmica do laminado de reforço são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 2,37 \times 10^{-6} \\ 1,41 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5. Alongamentos residuais do substrato

$$[\epsilon^r]_s = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_s \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_s \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 8,92 \times 10^{-6} \\ 7,75 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_s \times (OT - RT)$$

Entrando nessa equação os valores $OT = 80C$ e $RT = 25C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 8,92 \times 10^{-6} \\ 7,75 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (80 - 25) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_s \times (80 - 25)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} -0,02\% \\ -0,03\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Passo 6. Alongamentos residuais do laminado de reforço

$$[\epsilon^r]_r = [\alpha] \times (OT - RT) - [\alpha]_r \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_r \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 8,92 \times 10^{-6} \\ 7,75 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (80 - 25) - \begin{bmatrix} 2,37 \times 10^{-6} \\ 1,41 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}_r \times (80 - 45)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 0,04\% \\ 0,04\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Passo 7. Alongamentos mecânicos do sistema são

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ N_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 161\,000 & 0 \\ 161\,000 & 1\,092\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 264\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

As forças mecânicas são conhecidas

$$\begin{bmatrix} 800 \\ 1000 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 161\,000 & 0 \\ 161\,000 & 1\,092\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 264\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

De onde obtemos os alongamentos mecânicos do sistema substrato-reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07\% \\ 0,08\% \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

Passo 8. Os alongamentos totais são

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07\% \\ 0,08\% \\ 0,11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,04\% \\ 0,04\% \\ 0,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11\% \\ 0,12\% \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07\% \\ 0,08\% \\ 0,11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,02\% \\ -0,03\% \\ 0,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05\% \\ 0,05\% \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

Vemos que os alongamentos totais nas direções axial e circunferencial do substrato, 0,05%, são inferiores ao ponto de escoamento do aço. Isso significa que as espessuras do reforço axial e circunferencial foram superestimadas e podem ser reduzidas. Podemos fazer nova tentativa, com $t_{ry} = 3,0 \text{ mm}$ e $t_{rx} = 2,5 \text{ mm}$.

Passo 9. Resta calcular a largura das faixas de ancoragem, que transferem os esforços do revestimento ao costado. Para isso é necessário conhecer as forças totais N_x e N_y , que tracionam o reforço nas direções axial e circunferencial. Essas forças são obtidas pela lei de Hooke, multiplicando as matrizes de rigidez e os alongamentos totais dos laminados.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{ry} \times \begin{bmatrix} 0,11\% \\ 0,12\% \\ 0,11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times t_{rx} \times \begin{bmatrix} 0,11\% \\ 0,12\% \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 1\,000\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,50 \times \begin{bmatrix} 0,11\% \\ 0,12\% \\ 0,11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\,000\,000 & 23\,000 & 0 \\ 23\,000 & 80\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60\,000 \end{bmatrix} \times 0,40 \times \begin{bmatrix} 0,11\% \\ 0,12\% \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 509,0 \\ 661,0 \\ 59,0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As larguras das faixas de colagem do reforço ao substrato de aço devem ser

$$\Delta y = \frac{N_y \times CS}{140}$$

$$\Delta y = \frac{661 \times 10}{140} = 47 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{509 \times 10}{140} = 36 \text{ cm}$$

7 – Conclusão. Completamos assim a discussão da lei das misturas matricial para reabilitar estruturas de aço. Os exemplos numéricos apresentados trataram do dimensionamento pelo critério de rigidez mínima, mas o procedimento é idêntico para os demais critérios. A lei das misturas matricial leva em conta a interação entre as lâminas de reforço e o substrato, sendo por isso exata.

Para computar as matrizes do sistema, é necessário conhecer as espessuras dos laminados de reforço, exatamente o que estamos procurando computar. O problema é resolvido arbitrando essas espessuras e as usando nas fórmulas, para verificar se atendem às exigências de cada critério.

- No critério de rigidez mínima, as espessuras do reforço são determinadas para manter o alongamento do substrato igual ao ponto de escoamento.
- No critério de rigidez nominal, as espessuras do reforço são determinadas para manter o alongamento do substrato igual ao que ele teria se o equipamento tivesse a espessura especificada em norma.
- No critério de rigidez plena, as espessuras do reforço são determinadas para dar ao sistema rigidez igual à original do equipamento, sem levar em conta as espessuras mínimas ou estabelecidas em normas. O critério de rigidez plena é usado para dimensionar reforços em danos passantes, onde a espessura residual do substrato é $t_s = 0$.

O problema é resolvido por tentativas, arbitrando espessuras para os laminados de reforço e verificando se elas atendem ao critério adotado. Em todos os casos, os alongamentos totais do substrato de aço nunca ultrapassam o ponto de escoamento, que para o aço é 0,10%. Os

alongamentos admissíveis para os compósitos são muito superiores a 0,10% e por isso são irrelevantes como critério.

No capítulo seguinte vamos usar a lei das misturas unidimensional para calcular os reforços estruturais. A lei das misturas unidimensional não usa matrizes.

Capítulo 10

Reabilitação de estruturas metálicas

Método simplificado

1 – Introdução. Neste capítulo vamos aplicar a lei das misturas unidimensional para determinar a espessura dos reforços de compósito usados para reabilitar estruturas metálicas. A lei das misturas unidimensional ignora as interações entre o reforço e o substrato, mas isso tem pouca relevância no caso de reforços feitos com lâminas UD orientadas nas direções principais x e y do equipamento. Essa consideração nos leva a concluir que a lei das misturas unidimensional dá resultados muito precisos, praticamente iguais aos obtidos pela lei das misturas matricial discutida no capítulo anterior.

Como fizemos no capítulo anterior, os substratos metálicos serão modelados como lâminas de propriedades conhecidas.

2 – Módulos de elasticidade do sistema. Os módulos de elasticidade do sistema substrato-reforço são computados pela regra das misturas unidimensional apresentada no capítulo 3.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \times \frac{t_s}{t} + E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^x \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_s \times \frac{t_s}{t} + E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^y \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_s \times \frac{t_s}{t} + G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

Lembrando que os sistemas substrato-reforço são feitos com uma lâmina metálica (substrato) e dois laminados de fibras UD orientados nas direções x (axial) e y (circunferencial), a fórmula acima simplifica para

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \times \frac{t_s}{t} + E_x \times \frac{t_{ry}}{t} + E_y \times \frac{t_{rx}}{t} \\ E_s \times \frac{t_s}{t} + E_y \times \frac{t_{ry}}{t} + E_x \times \frac{t_{rx}}{t} \\ G_s \times \frac{t_s}{t} + G_{xy} \times \frac{t_{ry}}{t} + G_{xy} \times \frac{t_{rx}}{t} \end{bmatrix}$$

Onde

E_s é o módulo do substrato

t_s é a espessura residual do substrato

t_{ry} é a espessura do laminado de reforço na direção circunferencial y

t_{rx} é a espessura do laminado de reforço na direção axial x

$t = t_s + t_{ry} + t_{rx}$ é a espessura total do sistema

A tabela 1, importada do capítulo anterior, mostra as propriedades de substratos de aço e de lâminas UD de fibras de vidro e de carbono.

Propriedade	Fibras de vidro UD	Fibras de carbono UD	Aço
Teor por peso	0,70	0,60	-----
Teor volumétrico	0,50	0,50	-----
E_x (kg/cm ²)	100 000	80 000	2 100 000
E_y (kg/cm ²)	400 000	1 000 000	2 100 000
G_{xy} (kg/cm ²)	35 000	60 000	840 000
Escoamento	-----	-----	0,10%
ν_{yx}	0,30	0,30	0,25
ν_{xy}	0,08	0,02	0,25
α_x (1/C)	$45,0 \times 10^{-6}$	$30,0 \times 10^{-6}$	$13,0 \times 10^{-6}$
α_y (1/C)	$7,5 \times 10^{-6}$	$-1,0 \times 10^{-6}$	$13,0 \times 10^{-6}$
β_x (1/g)	0,18	0,07	-----
β_y (1/g)	0,04	0,02	-----

Tabela 1
Propriedades das lâminas de compósitos e do substrato de aço

Usando as propriedades da tabela 1, os módulos de elasticidade dos sistemas formados com aço e fibras de vidro é

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 400\,000 \times t_{ry} + 100\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 35\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

Para reforços com aço e fibras de carbono, os módulos do sistema são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 1\,000\,000 \times t_{ry} + 80\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

3. Módulos de elasticidade do laminado de reforço. Os módulos do laminado de reforço são

Laminados de fibras de vidro

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx} \\ 400\,000 \times t_{ry} + 100\,000 \times t_{rx} \\ 35\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

Laminados de fibras de carbono

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 1\,000\,000 \times t_{ry} + 80\,000 \times t_{rx} \\ 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

4. Coeficientes de dilatação térmica do sistema. Esses coeficientes são computados pela fórmula geral da lei das misturas unidimensional. Considerando as três lâminas que compõem o sistema, temos

Para sistemas com fibras de vidro

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s + 3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s + 3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{rx} + 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para sistemas com fibras de carbono

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Coeficientes de dilatação térmica do laminado de reforço. Esses coeficientes são computados pela fórmula geral da lei das misturas unidimensional

Para laminados de fibras de vidro

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{100\,000 \times t_{rx} + 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para laminados de fibras de carbono

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{-1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Alongamentos térmicos residuais. No caso de reforços com fibras de vidro, os alongamentos térmicos residuais são

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$$

Para o reforço de fibras de vidro

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \frac{3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{100\,000 \times t_{rx} \times 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

Para o reforço de fibras de carbono

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \frac{-1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{-1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

7. Alongamentos hídricos residuais. Esses alongamentos são computados exatamente como os térmicos, lembrando que os substratos metálicos não absorvem água. Assim, para reforço com fibras de vidro, os coeficientes de dilatação hídrica do sistema, são

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16000 \times t_{rx} + 18000 \times t_{ry}}{E_x^r \times (t_{ry} + t_{rx})} \\ \frac{16000 \times t_{ry} + 18000 \times t_{rx}}{E_y^r \times (t_{ry} + t_{rx})} \end{bmatrix}$$

Os alongamentos hídricos residuais para reforços de fibras de vidro são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{16000 \times t_{rx} + 18000 \times t_{ry}}{100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \times \Delta m \\ \frac{16000 \times t_{ry} + 18000 \times t_{rx}}{100\,000 \times t_{rx} \times 400\,000 \times t_{ry}} \times \Delta m \end{bmatrix}$$

Para reforços com fibras de carbono, os alongamentos hídricos residuais são computados exatamente da mesma maneira

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{7000 \times t_{rx} + 8000 \times t_{ry}}{80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \times \Delta m \\ \frac{7000 \times t_{ry} + 8000 \times t_{rx}}{80\,000 \times t_{rx} \times 1\,000\,000 \times t_{ry}} \times \Delta m \end{bmatrix}$$

Note que os alongamentos hídricos residuais são negativos, de compressão, porque o laminado é impedido de expandir ao absorver água.

Os alongamentos residuais hídricos do substrato metálico são nulos.

8. Alongamentos mecânicos. Os alongamentos mecânicos do sistema são computados pela lei de Hooke.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} \frac{N_x^M}{E_x} \\ \frac{N_y^M}{E_y} \\ \frac{N_{xy}^M}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

Onde “N” representa as forças mecânicas externas, todas conhecidas.

As tabelas 2 e 3 resumem as discussões anteriores

<i>Sistemas com fibras de vidro UD</i>	
<i>Módulos do sistema</i>	
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 400\,000 \times t_{ry} + 100\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 35\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$	
<i>Módulos do laminado de reforço</i>	
$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx} \\ 400\,000 \times t_{ry} + 100\,000 \times t_{rx} \\ 35\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$	
<i>Coefficientes de dilatação térmica do sistema</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s + 3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s + 3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{rx} + 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$	
<i>Coefficientes de dilatação térmica do laminado de reforço</i>	
$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{100\,000 \times t_{rx} + 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$	
<i>Alongamentos residuais do substrato</i>	
$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$	
<i>Alongamentos residuais do laminado de reforço</i>	

$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$
<i>Alongamentos mecânicos do sistema</i>
$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{t} \times \begin{bmatrix} N_x^M \\ E_x \\ N_y^M \\ E_y \\ N_{xy}^M \\ G_{xy} \end{bmatrix}$

Tabela 2
Equações para sistemas com fibras de vidro UD. Os alongamentos residuais do substrato são nulos.

Sistemas com fibras de carbono UD
<i>Módulos do sistema</i>
$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 1\,000\,000 \times t_{ry} + 800\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$
<i>Módulos do laminado de reforço</i>
$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 1\,000\,000 \times t_{ry} + 80\,000 \times t_{rx} \\ 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$
<i>Coefficientes de dilatação térmica do sistema</i>
$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Coefficientes de dilatação térmica do laminado de reforço</i>
$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{-1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$
<i>Alongamentos residuais do substrato</i>

$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$
<p><i>Alongamentos residuais do laminado de reforço</i></p>
$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$
<p><i>Alongamentos mecânicos do sistema</i></p>
$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} \frac{N_x^M}{E_x} \\ \frac{N_y^M}{E_y} \\ \frac{N_{xy}^M}{G_{xy}} \end{bmatrix}$

Tabela 3

Equações para sistemas com fibras de carbono UD. Os alongamentos residuais do substrato são nulos.

Exemplo 1. Usar a lei das misturas unidimensional para dimensionar o reforço estrutural do reservatório discutido no exemplo 1 do capítulo anterior. O dimensionamento será feito pelo critério de rigidez mínima, que computa a menor espessura do reforço para manter o alongamento no substrato igual ao ponto de escoamento, 0,10%

São dados:

$$D = 10\,000 \text{ mm}$$

$$H = 12\,000 \text{ mm}$$

$P = 1,2 \text{ kg/cm}^2$ é a pressão na chapa inferior do tanque

$$OT = RT = 25C$$

$PT = 45C$ (temperatura de cura da resina)

$t = 3,1 \text{ mm}$ (espessura nominal da chapa corroída)

$t_s = 1,6 \text{ mm}$ (espessura residual da chapa corroída)

$\Delta m = 0$ (revestimento externo, sem contato com água)

$N_x^M = 0$ (não existe força axial no tanque)

$N_y^M = 600 \text{ kg/cm}$ (força circunferencial na chapa inferior)

$N_{xy}^M = 0$ (não existe torque no tanque)

O dimensionamento do reforço de fibras de vidro UD será feito pelo critério de rigidez mínima, para assegurar que o alongamento total não exceda 0,10% na chapa inferior do costado.

Vamos seguir o protocolo.

Passo 1. Os módulos do sistema substrato-reforço são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 400\,000 \times t_{ry} + 100\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 35\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

Considerando a ausência de forças externas na direção axial, podemos fazer $t_{rx} = 0$.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 400\,000 \times t_{ry} \\ 840\,000 \times t_s + 35\,000 \times t_{ry} \end{bmatrix}$$

A força hidrostática externa atua na direção circunferencial y. A espessura mínima da chapa de aço no anel inferior do costado, onde a pressão é $1,2 \text{ kg/cm}^2$, deve ser

$$t = \frac{1,2 \times 10000}{2 \times 2100000 \times 0,001} = \frac{600}{2100000 \times 0,001} = 0,286 \text{ cm} = 2,86 \text{ mm}$$

A espessura do laminado t_{ry} será determinada para dar ao sistema substrato-reforço a mesma rigidez que essa chapa de aço de 2,86 mm.

$$2100000 \times 2,86 = 2100000 \times 1,6 + 400000 \times t_{ry}$$

$$t_{ry} = 6,62 \text{ mm}$$

Com esse valor de t_{ry} , os módulos de elasticidade do sistema são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{1,6 + 6,62} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times 1,6 + 100\,000 \times 6,62 \\ 2\,100\,000 \times 1,6 + 400\,000 \times 6,62 \\ 840\,000 \times 1,6 + 35\,000 \times 6,62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 490\,000 \\ 731\,000 \\ 192\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Passo 2. Os módulos de elasticidade do laminado são

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx} \\ 400\,000 \times t_{ry} + 100\,000 \times t_{rx} \\ 35\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{6,62} \times \begin{bmatrix} 100\,000 \times 6,62 \\ 400\,000 \times 6,62 \\ 35\,000 \times 6,62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\,000 \\ 400\,000 \\ 35\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Passo 3. Os coeficientes de dilatação térmica do sistema são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s + 3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s + 3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{2\,100\,000 \times t_s + 100\,000 \times t_{rx} + 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times 2,5 + 3,0 \times 0 + 4,5 \times 6,62}{2\,100\,000 \times 2,5 + 100\,000 \times 6,62 + 400\,000 \times 0} \\ \frac{27,30 \times 2,5 + 3,0 \times 6,62 + 4,5 \times 0}{2\,100\,000 \times 2,5 + 100\,000 \times 0 + 400\,000 \times 6,62} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,6 \times 10^{-6} \\ 11,2 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4. Os coeficientes de dilatação térmica do laminado são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,0 \times t_{rx} + 4,5 \times t_{ry}}{100\,000 \times t_{ry} + 400\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{3,0 \times t_{ry} + 4,5 \times t_{rx}}{100\,000 \times t_{rx} + 400\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4,5 \times 6,62}{100\,000 \times 6,62} \\ \frac{3,0 \times 6,62}{400\,000 \times 6,62} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5. Os alongamentos residuais do substrato são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,6 \times 10^{-6} \\ 11,2 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$$

Considerando que nesse caso $OT = RT = 25C$, temos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 6. Os alongamentos residuais do laminado de reforço são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,6 \times 10^{-6} \\ 11,2 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (25 - 25) - \begin{bmatrix} 45,0 \times 10^{-6} \\ 7,5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (25 - 45)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,09\% \\ 0,02\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 7. Os alongamentos mecânicos são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} N_x^M \\ E_x \\ N_y^M \\ E_y \\ N_{xy}^M \\ G_{xy} \end{bmatrix}$$

Onde as forças mecânicas externas são

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \times D \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,2 \times 1000 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{0,16 + 0,662} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 490000 \\ 600 \\ 731000 \\ 0 \\ 192000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,001 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,10\% \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

Esses são os alongamentos mecânicos do sistema substrato-reforço

Passo 8. Os alongamentos totais são

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,10\% \\ 0,000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,09\% \\ 0,02\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,09\% \\ 0,12\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,10\% \\ 0,000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,10\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Vemos que o alongamento total no substrato, na direção circunferencial, é igual ao ponto de escoamento do aço, 0,10%. Portanto, o laminado escolhido, com espessura 6,62 mm e orientado na direção circunferencial do costado, atende ao critério de rigidez mínima.

Passo 9. Resta calcular a largura da faixa de ancoragem, que cola o revestimento no costado. Para isso é necessário conhecer as forças totais N_x e N_y que tracionam o reforço nas direções axial e circunferencial. Essas forças são obtidas pela lei de Hooke, multiplicando os módulos do laminado pelos alongamentos totais correspondentes.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = 0,662 \times \begin{bmatrix} 100000 \times 0,09\% \\ 400000 \times 0,12\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,0 \\ 320,0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As larguras das faixas de colagem do reforço ao substrato de aço devem ser

$$\Delta y = \frac{N_y \times CS}{140}$$

$$\Delta y = \frac{320 \times 10}{140} = 23 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{60 \times 10}{140} = 5 \text{ cm}$$

O leitor pode comparar os resultados obtidos nesse exemplo, usando a lei das misturas unidirecional, com os do exemplo 1 do capítulo anterior, usando a lei das misturas matricial. Os dois métodos são equivalentes.

Exemplo 2. Repetir o problema anterior para reforço com fibras de carbono. O dimensionamento será feito pelo critério de rigidez mínima, que computa a menor espessura do reforço para manter o alongamento no substrato igual ao ponto de escoamento 0,10%

São dados:

$$D = 10\,000 \text{ mm}$$

$$H = 12\,000 \text{ mm}$$

$$P = 1,2 \text{ kg/cm}^2 \text{ é a pressão na chapa inferior do tanque}$$

$$OT = RT = 25C$$

$$PT = 45C \text{ (temperatura de cura da resina)}$$

$$t = 3,1 \text{ mm (espessura nominal da chapa corroída)}$$

$$t_s = 1,6 \text{ mm (espessura residual da chapa corroída)}$$

$$\Delta m = 0 \text{ (revestimento externo, sem contato com água)}$$

$$N_x^M = 0 \text{ (não existe força axial no tanque)}$$

$$N_y^M = 600 \text{ kg/cm (força circunferencial na chapa inferior)}$$

$$N_{xy}^M = 0 \text{ (não existe torque no tanque)}$$

Vamos aplicar o protocolo.

Passo 1. Os módulos do sistema substrato-reforço são

Os módulos do sistema substrato-reforço com fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 1\,000\,000 \times t_{ry} + 80\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

Considerando a ausência de forças externas na direção axial, podemos fazer $t_{rx} = 0$.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 1\,000\,000 \times t_{ry} \\ 840\,000 \times t_s + 35\,000 \times t_{ry} \end{bmatrix}$$

A força hidrostática externa atua na direção circunferencial y . A espessura mínima da chapa de aço no anel inferior do costado para resistir essa força é

$$t = \frac{600}{2100000 \times 0,001} = 0,286 \text{ cm} = 2,86 \text{ mm}$$

A espessura do laminado orientado na direção circunferencial, t_{ry} , será determinada para dar ao sistema substrato-reforço a mesma rigidez que uma chapa de aço de 2,86 mm.

$$2100000 \times 2,86 = 2100000 \times 1,6 + 1000 \ 000 \times t_{ry}$$

$$t_{ry} = 2,65 \text{ mm}$$

Com esse valor estimado para t_{ry} , os módulos de elasticidade do sistema são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{1,6 + 2,65} \times \begin{bmatrix} 2 \ 100 \ 000 \times 1,6 + 80 \ 000 \times 2,65 \\ 2 \ 100 \ 000 \times 1,6 + 1 \ 000 \ 000 \times 2,65 \\ 840 \ 000 \times 1,6 + 60 \ 000 \times 2,65 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 841 \ 000 \\ 1 \ 415 \ 000 \\ 354 \ 000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Passo 2. Os módulos de elasticidade do laminado são

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 80 \ 000 \times t_{ry} + 1 \ 000 \ 000 \times t_{rx} \\ 1 \ 000 \ 000 \times t_{ry} + 80 \ 000 \times t_{rx} \\ 60 \ 000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{2,65} \times \begin{bmatrix} 80 \ 000 \times 2,65 \\ 1 \ 000 \ 000 \times 2,65 \\ 60 \ 000 \times 2,65 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \ 000 \\ 1 \ 000 \ 000 \\ 60 \ 000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Passo 3. Os coeficientes de dilatação térmica do sistema são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{2 \ 100 \ 000 \times t_s + 80 \ 000 \times t_{ry} + 1 \ 000 \ 000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{2 \ 100 \ 000 \times t_s + 80 \ 000 \times t_{rx} + 1 \ 000 \ 000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times 1,6 - 1,0 \times 0 + 2,40 \times 2,65}{2 \ 100 \ 000 \times 1,6 + 80 \ 000 \times 2,65 + 1 \ 000 \ 000 \times 0} \\ \frac{27,30 \times 1,6 - 1,0 \times 2,65 + 2,40 \times 0}{2 \ 100 \ 000 \times 1,6 + 80 \ 000 \times 0 + 1 \ 000 \ 000 \times 2,65} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,00 \times 10^{-6} \\ 6,83 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4. Os coeficientes de dilatação térmica do laminado de fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{-1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2,40 \times 2,65}{80\,000 \times 2,65} \\ \frac{-1,0 \times 2,65}{1\,000\,000 \times 2,65} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,0 \times 10^{-6} \\ -1,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5. Os alongamentos residuais do substrato são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,00 \times 10^{-6} \\ 6,83 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$$

Considerando que nesse caso $OT = RT = 25C$, temos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 6. Os alongamentos residuais do laminado de reforço são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,00 \times 10^{-6} \\ 6,83 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (25 - 25) - \begin{bmatrix} 30,0 \times 10^{-6} \\ -1,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (25 - 45)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,00\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 7. Os alongamentos mecânicos são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} N_x^M \\ E_x \\ N_y^M \\ E_y \\ N_{xy}^M \\ G_{xy} \end{bmatrix}$$

Onde as forças mecânicas externas são

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P \times D}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1,2 \times 1000}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{0,16 + 0,265} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{841\,000}{600} \\ \frac{1\,415\,000}{0} \\ 0 \\ \frac{354\,000}{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,001 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,10\% \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

Esses são os alongamentos mecânicos do sistema substrato-reforço para laminado de fibras de carbono

Passo 8. Os alongamentos totais são

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,10\% \\ 0,000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,00\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,06\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,10\% \\ 0,000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,10\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Vemos que o alongamento total do substrato, na direção circunferencial, é igual ao ponto de escoamento do aço, 0,10%. Portanto, o laminado escolhido, com espessura 2,65 mm e orientado na direção circunferencial do costado, atende ao critério de rigidez mínima.

Passo 9. Resta calcular a largura da faixa de ancoragem, que cola o revestimento no costado. Para isso é necessário conhecer as forças totais N_x e N_y que tracionam o reforço nas direções axial e circunferencial. Essas forças são obtidas pela lei de Hooke, multiplicando os módulos do laminado pelos alongamentos totais correspondentes.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = 0,265 \times \begin{bmatrix} 80\,000 \times 0,06\% \\ 1\,000\,000 \times 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,0 \\ 265,0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As larguras das faixas de colagem do reforço ao substrato de aço devem ser

$$\Delta y = \frac{N_y \times CS}{140}$$

$$\Delta y = \frac{265 \times 10}{140} = 19 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{13 \times 10}{140} = 1 \text{ cm}$$

O leitor pode comparar os resultados obtidos nesse exemplo, usando a lei das misturas unidirecional, com os do exemplo 2 do capítulo anterior, usando a lei das misturas matricial. Os dois métodos são equivalentes.

Exemplo 3. Resolver o exemplo 3 do capítulo anterior usando a lei das misturas unidimensional.

São dados:

$OT = 80C$ é a temperatura de trabalho

$RT = 25C$ é a temperatura do ambiente

$PT = 45C$ é a temperatura de cura da resina

$\Delta m = 0$ (Reforço externo, sem contato com água)

$t = 6,3 \text{ mm}$ é a espessura nominal do tubo

$t_s = 2,5 \text{ mm}$ é a espessura residual do tubo

$N_y^M = 1000 \text{ kg/cm}$ é a força externa na direção circunferencial

$N_x^M = 800 \text{ kg/cm}$ é a força externa na direção axial

$N_{xy}^M = 300 \text{ kg.cm}$ é o torque externo

O reforço estrutural externo é de fibras de carbono. O critério de cálculo é rigidez mínima.

Vamos seguir o protocolo.

Passo 1. Os módulos do sistema substrato-reforço com fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 2\,100\,000 \times t_s + 1\,000\,000 \times t_{ry} + 80\,000 \times t_{rx} \\ 840\,000 \times t_s + 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

Analisando os dados do problema, notamos que a força externa na direção circunferencial é $1000/800 = 1,25$ vezes a força na direção axial. Por isso, como primeira tentativa, vamos supor $t_{ry} = 1,25 \times t_{rx}$. Além disso, considerando a relação entre os módulos das lâminas UD de carbono e de aço, podemos supor também nessa primeira tentativa $t_{ry} = 2,1 \times (4,8 - 2,5) \text{ mm} \approx 5,0 \text{ mm}$, onde $4,8 \text{ mm}$ é a espessura mínima da chapa de aço para dar ao tubo alongamento igual ao ponto de escoamento, $0,10\%$.

$$t = \frac{N_y}{E_s \times 0,001} = \frac{1000}{2100000 \times 0,001} = 0,48 \text{ cm} = 4,8 \text{ mm}$$

Entrando $t_{ry} = 5,0 \text{ mm}$ e $t_{rx} = 4,0 \text{ mm}$ na equação dos módulos, obtemos

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2,5 + 5,0 + 4,0} \times \begin{bmatrix} 2\,100\,000 \times 2,5 + 80\,000 \times 5,0 + 1\,000\,000 \times 4,0 \\ 2\,100\,000 \times 2,5 + 1\,000\,000 \times 5,0 + 80\,000 \times 4,0 \\ 840\,000 \times 2,5 + 60\,000 \times 9,0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 839\,000 \\ 919\,000 \\ 230\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Passo 2. Os módulos de elasticidade do laminado são

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx} \\ 1\,000\,000 \times t_{ry} + 80\,000 \times t_{rx} \\ 60\,000 \times (t_{ry} + t_{rx}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \frac{1}{9,0} \times \begin{bmatrix} 80\,000 \times 5,0 + 1\,000\,000 \times 4,0 \\ 1\,000\,000 \times 5,0 + 80\,000 \times 4,0 \\ 60\,000 \times (5,0 + 4,0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^r \\ E_y^r \\ G_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 489\,000 \\ 591\,000 \\ 60\,000 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Passo 3. Os coeficientes de dilatação térmica do sistema são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{27,30 \times t_s - 1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{2\,100\,000 \times t_s + 80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27,30 \times 2,5 - 1,0 \times 4,0 + 2,40 \times 5,0}{2\,100\,000 \times 2,5 + 80\,000 \times 5,0 + 1\,000\,000 \times 4,0} \\ \frac{27,30 \times 2,5 - 1,0 \times 5,0 + 2,40 \times 4,0}{2\,100\,000 \times 2,5 + 80\,000 \times 4,0 + 1\,000\,000 \times 5,0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,90 \times 10^{-6} \\ 6,89 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4. Os coeficientes de dilatação térmica do laminado de fibras de carbono são

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1,0 \times t_{rx} + 2,40 \times t_{ry}}{80\,000 \times t_{ry} + 1\,000\,000 \times t_{rx}} \\ \frac{-1,0 \times t_{ry} + 2,40 \times t_{rx}}{80\,000 \times t_{rx} + 1\,000\,000 \times t_{ry}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0 \times 4,0 + 2,40 \times 5,0 \\ \frac{80\,000 \times 5,0 + 1\,000\,000 \times 4,0}{80\,000 \times 4,0 + 1\,000\,000 \times 5,0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,81 \times 10^{-6} \\ 0,86 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 5. Os alongamentos residuais do substrato são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (OT - RT)$$

Considerando $OT = 80C$ e $RT = 25C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,90 \times 10^{-6} \\ 6,89 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (80 - 25) - \begin{bmatrix} 13,0 \times 10^{-6} \\ 13,0 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (80 - 25)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03\% \\ -0,03\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 6. Os alongamentos residuais do laminado de reforço são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \times (OT - RT) - \begin{bmatrix} \alpha_x^r \\ \alpha_y^r \\ \alpha_{xy}^r \end{bmatrix} \times (OT - PT)$$

Considerando $OT = 80C$, $RT = 25C$ e $PT = 45C$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,90 \times 10^{-6} \\ 6,89 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (80 - 25) - \begin{bmatrix} 1,81 \times 10^{-6} \\ 0,86 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times (80 - 45)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^r \\ \epsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04\% \\ 0,03\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 7. Os alongamentos mecânicos são

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_s + t_{ry} + t_{rx})} \times \begin{bmatrix} \frac{N_x^M}{E_x} \\ \frac{N_y^M}{E_y} \\ \frac{N_{xy}^M}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

Onde as forças mecânicas externas são

$$\begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1000 \\ 300 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{1}{0,25 + 0,50 + 0,40} \times \begin{bmatrix} 800 \\ 839000 \\ 1000 \\ 919000 \\ 300 \\ 230000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08\% \\ 0,09\% \\ 0,11\% \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08\% \\ 0,09\% \\ 0,11\% \end{bmatrix}$$

Esses são os alongamentos mecânicos do sistema substrato-reforço para laminado de fibras de carbono

Passo 8. Os alongamentos totais são

Para o reforço

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08\% \\ 0,09\% \\ 0,11\% \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,04\% \\ 0,03\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,12\% \\ 0,12\% \\ 0,11\% \end{bmatrix}$$

Para o substrato

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^{total} \\ \epsilon_y^{total} \\ \gamma_{xy}^{total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08\% \\ 0,09\% \\ 0,11\% \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,03\% \\ -0,03\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05\% \\ 0,06\% \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Vemos que os alongamentos totais do substrato, nas direções circunferencial e axial, são muito inferiores ao ponto de escoamento do aço, 0,10%. Isso significa que o laminado de reforço escolhido, com espessura total 9,0 mm, excede as necessidades da aplicação. Devemos fazer nova tentativa, arbitrando espessuras menores para os laminados. Uma boa sugestão seria $t_{ry} = 3,0$ mm e $t_{rx} = 2,5$ mm.

Passo 9. Resta calcular a largura da faixa de ancoragem, que cola o revestimento no costado. Para isso é necessário conhecer as forças totais N_x e N_y que tracionam o reforço nas direções axial e circunferencial. Essas forças são obtidas pela lei de Hooke, multiplicando os módulos do laminado pelos alongamentos totais correspondentes.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = 0,90 \times \begin{bmatrix} 489\,000 \times 0,12\% \\ 591\,000 \times 0,12\% \\ 60\,000 \times 0,11\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 528,0 \\ 638,0 \\ 59,0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

As larguras das faixas de colagem do reforço ao substrato de aço devem ser

$$\Delta y = \frac{N_y \times CS}{140}$$

$$\Delta y = \frac{638 \times 10}{140} = 46 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \frac{528 \times 10}{140} = 38 \text{ cm}$$

O leitor pode comparar os resultados obtidos nesse exemplo com os do exemplo 3 do capítulo anterior, que usou a lei das misturas matricial. Os dois métodos são equivalentes.

Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo e no anterior consideraram os reforços dimensionados pelo critério de rigidez mínima. Os protocolos de cálculo são idênticos para todos os critérios. A única coisa que muda com os diferentes critérios é a espessura residual do substrato.

O custo dos revestimentos calculados pelo critério de rigidez nominal deve ser pouca coisa superior ao dos calculados para rigidez mínima. Isso deve ser assim, porque os custos logísticos de execução desses serviços no campo pesam muito mais que os custos de materiais.

O critério de rigidez plena deve ser usado para dimensionar reparos passantes, aqueles em que a espessura residual do substrato é $t_s = 0$. A restauração da rigidez plena do equipamento impede o crescimento de trincas do tipo I nesses casos. Esse critério deve ser usado também para dimensionar reparos nos quais as forças externas são desconhecidas, como no casco de cascos navios. Nesses casos devem ser usados reforços quase isotópicos, porque as direções das cargas são desconhecidas.

Os alongamentos admissíveis para os laminados de reforço são muito superiores ao ponto de escoamento do aço (0,10%) e por isso não são necessários para esses cálculos. Eles nem foram mencionados. Da mesma maneira, o efeito da temperatura de trabalho nas propriedades dos laminados não precisa ser considerado para aplicações 20C abaixo do HDT da resina.

Apêndice

A tabela 4 compara os métodos para dimensionar reforços estruturais usando as leis das misturas matricial e unidimensional. Como vemos, os dois métodos seguem o mesmo protocolo e devem dar resultados praticamente iguais.

<i>Lei das misturas matricial</i>	<i>Lei das misturas unidimensional</i>
<i>Escolha das espessuras</i>	<i>Escolha das espessuras</i>
<i>Computação da matriz de rigidez do sistema e do laminado</i>	<i>Computação dos módulos do sistema e do laminado</i>
<i>Computação dos coeficientes de dilatação do sistema e do reforço</i>	<i>Computação dos coeficientes de dilatação do sistema e do reforço</i>
<i>Computação dos alongamentos residuais do sistema e do reforço</i>	<i>Computação dos alongamentos residuais do sistema e do reforço</i>
<i>Computação dos alongamentos mecânicos</i>	<i>Computação dos alongamentos mecânicos</i>
<i>Computação dos alongamentos totais</i>	<i>Computação dos alongamentos totais</i>
<i>Computação das faixas de ancoragem</i>	<i>Computação das faixas de ancoragem</i>

Tabela 4

Fluxograma de cálculo dos reforços usando as leis das misturas matricial e unidimensional. Os fluxogramas são idênticos.

A tabela 5 compara os resultados obtidos no capítulo anterior, usando a lei matricial, com os obtidos neste capítulo usando a lei unidimensional.

Exemplo número		Lei matricial	Lei unidimensional	Erro
		Fibras de vidro UD	Fibras de vidro UD	
1	t_{ry}	6,5 mm	6,62 mm	0,12 mm
	t_{rx}	0,00	0,00	0
	ϵ_y	0,10%	0,10%	0
	ϵ_x	- 0,03%	0,00	0
	Δy	230 mm	230 mm	0
	Δx	50 mm	50 mm	0
			Fibras de carbono UD	Fibras de carbono UD
2	t_{ry}	3,0 mm	2,65 mm	0,35 mm
	t_{rx}	0,00	0,00	0
	ϵ_y	0,09%	0,10%	0,01%
	ϵ_x	- 0,02%	0,00%	0,02%
	Δy	200 mm	190 mm	10 mm
	Δx	20 mm	10 mm	10 mm
			Fibras de carbono UD	Fibras de carbono UD
3	t_{ry}	5,0 mm	5,0 mm	0
	t_{rx}	4,0 mm	4,0 mm	0
	ϵ_y	0,05%	0,06%	0,01%
	ϵ_x	0,05%	0,05%	0
	Δy	470 mm	460 mm	10 mm
	Δx	360 mm	380 mm	20 mm
			Fibras de carbono UD	Fibras de carbono UD

Tabela 5

As leis matricial e unidirecional dão praticamente os mesmos resultados

Capítulo 11

Revestimentos e choque térmico

1 – Introdução. Este capítulo mostra como calcular o efeito de choques térmicos em revestimentos de compósito aplicados sobre substratos de aço ou de concreto. Esse problema é particularmente importante em revestimentos de grande espessura, como os de compósito.

Os produtos agressivos comerciais são armazenados e processados como soluções aquosas. O tempo que a água leva para saturar revestimentos aplicados em substratos metálicos impermeáveis pode ser estimado pela expressão.

$$t_{sat} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\Delta^2}{D}$$

Onde

t_{sat} = tempo de saturação (dias)

Δ = espessura do revestimento (mm)

D = coeficiente de difusão da água no revestimento (mm^2/dia)

Os coeficientes de difusão D da água a 40C são mostrados na tabela 1 para lâminas feitas com resinas poliéster de alta reatividade e com Derakane 470.

Lâmina	Coeficiente de difusão D Poliéster de alta reatividade	Coeficiente de difusão D Derakane 470
Liner	0,35 mm^2/dia	0,17 mm^2/dia
Fibras picadas	0,17 mm^2/dia	0,09 mm^2/dia

<i>Fibras tecidas</i>	<i>0,09 mm²/dia</i>	<i>0,04 mm²/dia</i>
<i>UD</i>	<i>0,03 mm²/dia</i>	<i>0,02 mm²/dia</i>

Tabela 1

Mostra os coeficientes de difusão da água @ 40C em lâminas comerciais feitas com resina poliéster e com Derakane 470

Exemplo 1. *Calcular o tempo que a água @ 40C leva para saturar revestimentos de 5,0 mm de espessura, feito com fibras de vidro picadas. São dados:*

$$\Delta = 5,0 \text{ mm}$$

$$D = 0,17 \text{ mm}^2/\text{dia para resina poliéster}$$

$$D = 0,09 \text{ mm}^2/\text{dia para resina DK470}$$

$$OT = 40C$$

O tempo de saturação para revestimentos feitos com poliéster é

$$t_{sat} = \frac{\pi}{4} \times \frac{5^2}{0,17} = 115 \text{ dias}$$

Para revestimentos feitos com resina DK 470, esse tempo é

$$t_{sat} = \frac{\pi}{4} \times \frac{5^2}{0,09} = 215 \text{ dias}$$

Este exemplo mostra que revestimentos de grande espessura (5,0 mm) podem saturar em menos de 4 meses. Esses tempos de saturação nos permitem tirar duas conclusões de grande importância para a análise de revestimentos de compósito.

- *Os tempos de saturação com água são curtos em relação à durabilidade esperada. Os revestimentos que trabalham em ambientes aquosos devem ser analisados supondo saturação plena de todas lâminas.*
- *Os tempos de saturação são longos em relação à duração de choques térmicos. Os revestimentos submetidos a choques térmicos devem ser analisados como se a água não penetrasse e não escapasse deles.*

A segunda conclusão indica que, de fato, não existe choque hídrico em revestimentos, porque eles secam ou absorvem água em tempos relativamente longos. Dessa maneira, vamos tratar apenas de choques térmicos de laminados secos ou saturados. Não existem choques hídricos.

Para facilitar a análise, vamos supor as lâminas dos revestimentos igualmente saturadas com concentração de água Δm e igualmente aquecidas na temperatura de trabalho OT. Os substratos não absorvem água e para eles $\Delta m = 0$. Quanto à temperatura do substrato, temos que levar em conta duas situações.

- Em regime permanente, com a operação estável, a temperatura do substrato é assumida igual à do revestimento, OT. A absorção de água no substrato, como dissemos, é sempre $\Delta m = \text{zero}$.
- Em situações de desequilíbrio, os chamados choques térmicos, a temperatura do substrato pode ser muito diferente da temperatura do revestimento. Por exemplo, nos choques de aquecimento, a temperatura do substrato permanece igual à do ambiente, RT, enquanto a do revestimento passa para a temperatura de choque CT. Nos choques de esfriamento essa condição é invertida e o substrato mantém a temperatura de trabalho OT, enquanto o revestimento é subitamente esfriado para a temperatura de choque CT. Nos dois casos as lâminas dos revestimentos permanecem em seus estados hídricos iniciais, saturadas ou secas.

3 – Alongamentos totais. Os alongamentos totais nas lâminas de revestimentos são computados como explicado no capítulo 6. A matriz de rigidez $[A]$ do sistema substrato e revestimento é calculada da maneira usual.

$$[A] = [A]_{rev} + [A]_{sub}$$

A equação acima pode ser simplificada. Para entender isso, considere os dados da tabela 2.

	<i>Espessura (t)</i>	<i>Módulo de elasticidade (E)</i>	<i>Rigidez de tração (E.t)</i>
<i>Substrato de aço</i>	<i>0,65 cm</i>	<i>2 100 000 kg/cm²</i>	<i>1 365 000 kg/cm</i>
<i>Substrato de concreto</i>	<i>10,0 cm</i>	<i>250 000 kg/cm²</i>	<i>2 500 000 kg/cm</i>
<i>Revestimento</i>	<i>0,5 cm</i>	<i>60 000 kg/cm²</i>	<i>30 000 kg/cm</i>

Tabela 2

Compara a rigidez de revestimentos de grande espessura com as de substratos de aço e de concreto.

A tabela 2 mostra que a rigidez de chapas finas de aço (6,5 mm) é 45 vezes maior que a de revestimentos relativamente espessos (5,0 mm). Essa diferença é tão grande que na prática a matriz de rigidez $[A]$ do sistema substrato e revestimento é praticamente igual à do substrato.

$$[A] = [A]_{sub} + [A]_{rev} \cong [A]_{sub}$$

Portanto, a análise de revestimentos em substratos de aço ou de concreto pode ser feita considerando a matriz $[A]$ do sistema igual à do substrato $[A]_{sub}$. Outra consideração que simplifica a análise é que os revestimentos geralmente são feitos com lâminas isotrópicas de fibras picadas, de areia ou de resina. As lâminas de fibras tecidas, quando usadas, são posicionadas com as direções principais 1 e 2 coincidindo com as direções globais y e x. Portanto, as matrizes de rigidez e os coeficientes de dilatação (térmica e hídrica) de todas as lâminas no sistema global são iguais aos seus valores nos sistemas locais. Na análise de revestimentos não é necessário girar nenhum alongamento ou propriedade de lâminas.

As resultantes térmicas e hídricas do sistema são calculadas usando a equação geral desenvolvida no capítulo 6, lembrando que os substratos trabalham na temperatura OT e não absorvem água. Os substratos não têm “temperatura de pico” e para eles PT = RT. Além disso, como os substratos não absorvem água, para eles $\Delta m = 0$. Entrando essas informações na equação geral, obtemos

Para as resultantes térmicas do sistema substrato-revestimento

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} \cong [A]_{sub} \times [\alpha]_{sub} \times (OT - RT)$$

Para as resultantes hídricas do sistema substrato-revestimento

$$\begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = [A]_{rev} \times [\beta]_{rev} \times \Delta m$$

Examinando as equações acima, notamos que as resultantes térmicas do sistema são controladas pelo substrato, podendo ter grande magnitude. As resultantes hídricas, ao contrário, são controladas pelo revestimento e têm pequena magnitude.

Os alongamentos térmicos de equilíbrio nas direções globais x – y são calculados da maneira descrita no capítulo 6.

$$[A]_{sub} \times [\alpha]_{sub} \times (OT - RT) = [A]_{sub} \times [\varepsilon^e]$$

Desenvolvendo esta equação, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix}_{TER} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub} (OT - RT) \\ \alpha_{sub} (OT - RT) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa equação diz que os alongamentos térmicos de equilíbrio do sistema são iguais aos do substrato. Isso é óbvio, tendo em vista sua enorme rigidez. O revestimento tem rigidez muito baixa e não interfere nos alongamentos térmicos de equilíbrio.

O mesmo raciocínio vale para os alongamentos hídricos.

$$[A]_{rev} \times [\beta]_{rev} \times \Delta m = [A]_{sub} \times [\varepsilon^e]$$

Levando em conta que $[A]_{sub} \gg [A]_{rev}$, concluímos que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix}_{HID} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os alongamentos hídricos de equilíbrio são nulos. Isso também é óbvio, tendo em vista que os substratos não absorvem água.

Como dito, os alongamentos de equilíbrio no sistema global são iguais aos das lâminas em seus sistemas locais.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_2^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}_{TER} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}_{TER} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_2^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}_{HID} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}_{HID} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos térmicos de equilíbrio são determinados pelo coeficiente de dilatação do substrato e pelas temperaturas OT e RT. Eles não dependem de nenhuma propriedade do revestimento. Os alongamentos hídricos de equilíbrio são nulos, indicando que o sistema não expande nem contrai em presença de ambientes aquosos.

Os alongamentos térmicos residuais nas lâminas são calculados pelas equações discutidas no capítulo 6.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_2^r \\ \gamma_{12}^r \end{bmatrix}_{TER} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^e - \alpha_1(OT - PT) \\ \varepsilon_2^e - \alpha_2(OT - PT) \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix}$$

Para simplificar a notação, vamos desconsiderar os índices “r” e “TER”. Fica entendido então que os alongamentos residuais térmicos nas lâminas são

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos residuais térmicos dependem do substrato, das temperaturas OT, RT e PT, bem como dos coeficientes de dilatação térmica das lâminas.

Os alongamentos residuais hídricos nas lâminas são

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos residuais hídricos nas lâminas dependem apenas do coeficiente de dilatação hídrica delas. Eles não são afetados pelo substrato.

Esses são os alongamentos residuais térmicos e hídricos nas lâminas de revestimentos. Os alongamentos mecânicos são calculados considerando as cargas externas e a rigidez do

substrato. Para estruturas cilíndricas, submetidas a pressões hidrostáticas, eles geralmente são:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos totais nas lâminas são obtidos somando os residuais com os mecânicos.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Essa equação calcula os alongamentos totais nas direções 1 e 2 de todas lâminas de qualquer revestimento. Nas equações acima α_{sub} é o coeficiente de dilatação térmica do substrato de aço ou de concreto, que será suposto igual a

$$\alpha_{sub} = 13,0 \times 10^{-6} / C.$$

Os três exemplos numéricos que seguem ilustram aplicações da equação (1) a revestimentos em situações extremas de alta ou de baixa temperatura, em ambientes secos ou saturados. A análise de choques térmicos será discutida depois desses três exemplos.

Exemplo 2. Calcular os alongamentos totais nas lâminas de revestimentos operando na temperatura ambiente $RT = 25C$. São dados:

Temperatura de pico na cura do revestimento $PT = 45C$.

Temperatura de trabalho $OT = RT = 25C$

Absorção de água pela resina $\Delta m = 0,01$.

Os alongamentos totais das lâminas são computados pela equação (1)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(25 - 25) - 13 \times 10^{-6}(25 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(25 - 25) - 13 \times 10^{-6}(25 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,15 \times 0,01 \\ -0,15 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,154\% \\ -0,024\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(25 - 25) - 25 \times 10^{-6}(25 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(25 - 25) - 25 \times 10^{-6}(25 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,19 \times 0,01 \\ -0,19 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,170\% \\ -0,040\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(25 - 25) - 60 \times 10^{-6}(25 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(25 - 25) - 60 \times 10^{-6}(25 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,40 \times 0,01 \\ -0,40 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,42\% \\ -0,18\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como vemos, todas lâminas trabalham comprimidas. Isso se deve à absorção de água pela resina.

Exemplo 3. Calcular os alongamentos totais nas lâminas de revestimentos operando a 100C. São dados:

Temperatura de pico na cura do revestimento $PT = 45C$.

Temperatura de trabalho $OT = 100C$

Absorção de água pela resina $\Delta m = 0,01$.

Os alongamentos das lâminas são computados pela equação (1)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(100 - 25) - 13 \times 10^{-6}(100 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(100 - 25) - 13 \times 10^{-6}(100 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,15 \times 0,01 \\ -0,15 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,154\% \\ -0,024\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(100 - 25) - 25 \times 10^{-6}(100 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(100 - 25) - 25 \times 10^{-6}(100 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,19 \times 0,01 \\ -0,19 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,260\% \\ -0,130\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(100 - 25) - 60 \times 10^{-6}(100 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(100 - 25) - 60 \times 10^{-6}(100 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,40 \times 0,01 \\ -0,40 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,66\% \\ -0,53\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez, notamos que todas as lâminas trabalham comprimidas.

Exemplo 4. Calcular os alongamentos totais nas lâminas de revestimentos operando na temperatura $OT = 0C$. São dados:

Temperatura de pico na cura do revestimento $PT = 45C$.

Temperatura de trabalho $OT = 0C$.

Absorção de água pela resina $\Delta m = 0,01$.

Os alongamentos das lâminas são computados pela equação (1)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(0 - 25) - 13 \times 10^{-6}(0 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(0 - 25) - 13 \times 10^{-6}(0 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,15 \times 0,01 \\ -0,15 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,154\% \\ -0,143\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(0 - 25) - 25 \times 10^{-6}(0 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(0 - 25) - 25 \times 10^{-6}(0 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,19 \times 0,01 \\ -0,19 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,194\% \\ -0,064\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(0 - 25) - 60 \times 10^{-6}(0 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(0 - 25) - 60 \times 10^{-6}(0 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,40 \times 0,01 \\ -0,40 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,19\% \\ -0,06\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Todos alongamentos são negativos, indicando que as lâminas trabalham comprimidas a 0C.

Esses 3 exemplos numéricos indicam que as lâminas de revestimentos trabalham comprimidas a 100C, 25C e 0C. Em outras palavras, os revestimentos sempre trabalham

comprimidos. Esse fato curioso é explicado pela dilatação das lâminas quando a resina absorve água. Deve ser notado que os alongamentos totais nas lâminas não dependem da espessura do revestimento.

4 – Choques térmicos. A literatura sobre choques térmicos em compósitos é escassa e superficial. Os poucos estudos que encontrei sobre esse tema são muito simplificados e insatisfatórios. Nesta seção vamos apresentar a solução completa para esse problema.

A análise é desenvolvida para substratos de aço ou de concreto, ambos com coeficiente de dilatação térmica

$$\alpha_{sub} = 13,0 \times 10^{-6}/C$$

O modelo de cálculo é baseado nas seguintes hipóteses:

- *A matriz de rigidez [A] dos substratos é muito maior que a dos revestimentos.*
- *A resposta térmica dos revestimentos é suposta instantânea. A temperatura dos revestimentos é sempre igual à temperatura do choque térmico, CT.*
- *A resposta hídrica dos revestimentos é lenta em relação à dos choques térmicos. Os revestimentos mantem suas condições saturadas ou secas antes, durante e depois do choque térmico.*
- *Somente os revestimentos são afetados pelo choque térmico. Os substratos não são afetados e permanecem nas condições iniciais. Essa hipótese é razoável, considerando a enorme massa do substrato.*

A temperatura e os alongamentos dos substratos não variam e permanecem iguais antes, durante e depois da perturbação. Os revestimentos são afetados instantaneamente por variações na temperatura, mas mantém inalteradas suas condições secas ou saturadas. Os alongamentos totais nas lâminas são computados considerando que apenas o revestimento atinge a temperatura de choque CT.

Os choques térmicos são analisados em dois cenários.

1. Aquecimento brusco de substratos frios. Neste cenário o substrato é mantido na temperatura do ambiente, RT, e o revestimento é aquecido instantaneamente à temperatura de choque CT. Essa situação reproduz a condição de pós-cura de equipamentos, feita com ar quente ou com vapor. O choque ocorre apenas no revestimento, que é aquecido instantaneamente da temperatura RT a CT. O substrato permanece na temperatura RT.

2. Esfriamento brusco de substratos quentes. Neste cenário o substrato é mantido na temperatura de trabalho OT, enquanto o revestimento é esfriado instantaneamente para a temperatura de choque CT. Essa situação reproduz o choque sofrido por equipamentos retirados de operação na temperatura OT e esfriados bruscamente com água fria. A temperatura do revestimento cai instantaneamente de OT para CT, enquanto o substrato permanece na temperatura OT.

Nos dois cenários, a água absorvida pelo revestimento não tem tempo para escapar, permanecendo a mesma antes, durante e depois do choque.

Vamos analisar os choques térmicos numericamente, computando os alongamentos totais nas lâminas de revestimentos nos casos extremos que simulam os processos de pós-cura e de esfriamento brusco. Exemplos numéricos são mais poderosos que longas dissertações para descrever essas situações extremas. Vamos iniciar a análise discutindo o efeito dos choques térmicos na integridade dos laminados. O efeito no descolamento é analisado em seguida.

Exemplo 5. Aquecimento brusco de revestimento seco

Temperatura do substrato $OT = RT = 25C$

Temperatura do revestimento $OT = CT = 125C$

Temperatura de pico na cura da resina $PT = 45C$

$\Delta m = 0$. O revestimento seco não tem tempo para absorver água.

Vamos supor que o equipamento sofra choque térmico em operação, isto é, submetido a cargas mecânicas. O caso de equipamento sem carga é analisado na sequência. Os alongamentos das lâminas são computados usando a equação (1).

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(25 - 25) - \alpha_1(125 - 45) \\ \alpha_{sub}(25 - 25) - \alpha_2(125 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \times 0 \\ -\beta_2 \times 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \times \alpha_1 \\ -80 \times \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0003 - 80 \times \alpha_1 \\ 0,0010 - 80 \times \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A equação acima computa os alongamentos totais em todas lâminas do revestimento, para a condição de choque térmico em equipamento seco com $CT = 125C$. Observe que a absorção de água é $\Delta m = 0$, independente da pós-cura ser feita com ar seco ou com vapor.

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0003 - 80 \times \alpha_1 \\ 0,0010 - 80 \times \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0003 - 80 \times 13 \times 10^{-6} \\ 0,0010 - 80 \times 13 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,134\% \\ -0,004\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0003 - 80 \times 25 \times 10^{-6} \\ 0,0010 - 80 \times 25 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,230\% \\ -0,100\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0003 - 80 \times 60 \times 10^{-6} \\ 0,0010 - 80 \times 60 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,510\% \\ -0,380\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos negativos indicam que todas as lâminas são comprimidas durante o choque na temperatura $CT = 125C$. Não existe, portanto, problema com a integridade do revestimento nessa operação. O que pode acontecer é descolamento axial do revestimento, que será analisado mais adiante.

Vamos considerar agora o equipamento submetido a aquecimento brusco sem cargas mecânicas. Essa condição simula a pós-cura com ar seco ou com vapor. Os alongamentos nas lâminas do revestimento são computados exatamente da mesma maneira, usando a equação (1) e ignorando os alongamentos mecânicos.

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,134\% \\ -0,004\% \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,100\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,104\% \\ -0,104\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,230\% \\ -0,100\% \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,100\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,200\% \\ -0,200\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,510\% \\ -0,380\% \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,100\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,480\% \\ -0,480\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os alongamentos são todos de compressão, indicando que a pós-cura não causa dano no revestimento.

Exemplo 6. Esfriamento brusco de revestimento seco

Temperatura do substrato $OT = 125C$

Temperatura do revestimento $OT = CT = 0C$

Umidade do revestimento seco $\Delta m = 0$

Temperatura de pico na cura da resina $PT = 45C$

O equipamento nesse caso trabalha em ambiente seco, de modo que $\Delta m = 0$. Os alongamentos são computados pela equação (1) supondo o equipamento em carga

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(125 - 25) - \alpha_1(0 - 45) \\ \alpha_{sub}(125 - 25) - \alpha_2(0 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45\alpha_1 \\ 0,0023 + 45\alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45 \times 13 \times 10^{-6} \\ 0,0023 + 45 \times 13 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16\% \\ 0,29\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45 \times 25 \times 10^{-6} \\ 0,0023 + 45 \times 25 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,21\% \\ 0,34\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45 \times 60 \times 10^{-6} \\ 0,0023 + 45 \times 60 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,37\% \\ 0,50\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se o choque acontecer com o equipamento sob carga, o alongamento total na lâmina de fibras picadas na direção circunferencial y (0,34%) pode exceder o umbral de infiltração de revestimentos feitos com resinas rígidas. Isso pode causar dano permanente.

Portanto, em ambientes secos, os revestimentos feitos com resina rígida (Derakane 470) podem exceder o umbral de infiltração se esfriados bruscamente. Essa conclusão vale apenas para revestimentos trabalhando em condições estáveis, na temperatura OT = 125C.

Se o esfriamento acontecer com o equipamento sem carga, os alongamentos são

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16\% \\ 0,29\% \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19\% \\ 0,19\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,21\% \\ 0,34\% \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,24\% \\ 0,24\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,37\% \\ 0,50\% \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40\% \\ 0,40\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez, o alongamento da lâmina de fibras picadas (nesse caso 0,24%) pode exceder o umbral de infiltração de resinas rígidas. Os equipamentos revestidos com resinas rígidas (Derakane 470) e que trabalham em ambientes secos, devem ser esfriados de maneira lenta e gradual. O exemplo numérico seguinte verifica se essa precaução é necessária também para equipamentos que trabalham saturados.

Exemplo 7. Esfriamento brusco de revestimento saturado.

Temperatura do substrato $OT = 125C$

Temperatura do revestimento $OT = CT = 0C$

Umidade do revestimento $\Delta m = 0,01$

Temperatura de pico na cura da resina $PT = 45C$

O revestimento nesse caso é saturado, porque trabalha em contato prolongado com solução aquosa. Supondo o equipamento em carga, os alongamentos são computados pela equação (1)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1\Delta m \\ -\beta_2\Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(125 - 25) - \alpha_1(0 - 45) \\ \alpha_{sub}(125 - 25) - \alpha_2(0 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 \times 0,01 \\ \beta_2 \times 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45\alpha_1 - 0,01\beta_1 \\ 0,0023 + 45\alpha_2 - 0,01\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45 \times 13 \times 10^{-6} - 0,01 \times 0,15 \\ 0,0023 + 45 \times 13 \times 10^{-6} - 0,01 \times 0,15 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,008\% \\ 0,138\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45 \times 25 \times 10^{-6} - 0,01 \times 0,19 \\ 0,0023 + 45 \times 25 \times 10^{-6} - 0,01 \times 0,19 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,023\% \\ 0,153\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010 + 45 \times 60 \times 10^{-6} - 0,01 \times 0,40 \\ 0,0023 + 45 \times 60 \times 10^{-6} - 0,01 \times 0,40 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03\% \\ 0,10\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

O alongamento total na lâmina de fibras picadas na direção circunferencial y (0,153%) não excede o umbral de infiltração e não causa dano permanente no revestimento. Os revestimentos

saturados, mesmo sob cargas mecânicas, podem ser esfriados bruscamente com água ou com ar frio. O esfriamento nesses casos não precisa ser lento e gradual.

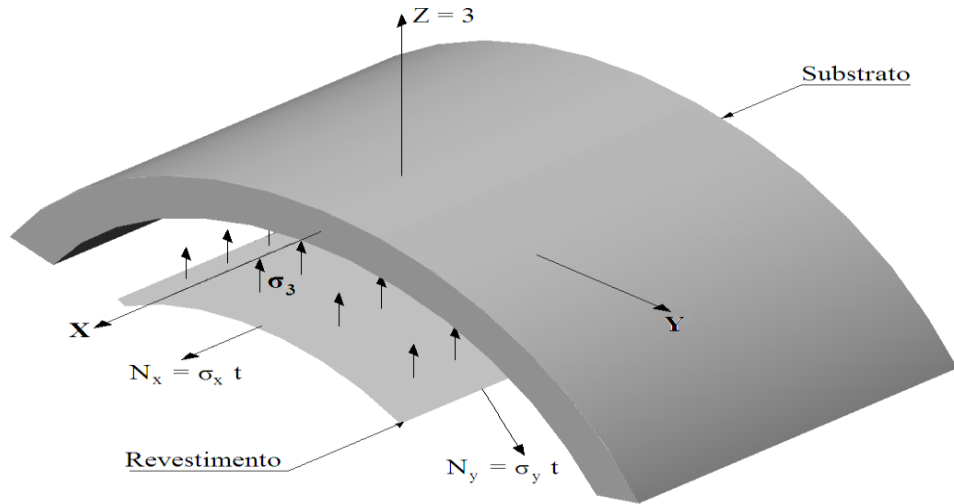


Figura 1

Mostra a tensão radial de tração σ_3 que impede o encolhimento de revestimentos aplicados sobre substratos cilíndricos. Essa tensão radial impede o descolamento do revestimento.

5 – Descolamento de revestimentos. A análise anterior indicou que revestimentos de equipamentos cilíndricos trabalhando secos em altas temperaturas podem sofrer danos se esfriados rapidamente. Indicou também que esses mesmos revestimentos, quando saturados, podem ser esfriados sem preocupação. Essas conclusões valem para a integridade das lâminas e ignoram o problema de descolamento. Nesta seção vamos desenvolver as equações usadas para analisar o descolamento de revestimentos cilíndricos submetidos a choques térmicos.

Quando esfriados bruscamente, os revestimentos cilíndricos encolhem e tendem a separar dos substratos, que permanecem aquecidos e dilatados. Essa tendência ao descolamento é particularmente relevante em revestimentos de grande espessura, que desenvolvem grandes forças de arrancamento (pull-off).

Vamos analisar essa situação. Os alongamentos totais (residuais e mecânicos) nas lâminas de revestimentos submetidos a esfriamentos bruscos são computados pela equação (1).

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esses alongamentos são mantidos por forças atuantes nas lâminas. A soma dessas forças produz no revestimento as resultantes N_x e N_y mostradas na figura 1. São essas resultantes N_x e N_y que impedem o encolhimento de revestimentos cilíndricos quando esfriados. A

figura 1 mostra também a tensão radial de arrancamento, σ_3 . Essa tensão radial, conhecida como “pull-off stress”, tem a mesma função que a pressão interna em cilindros. A diferença é que a pressão interna empurra – e a tensão de arrancamento puxa – o revestimento contra o substrato. A tensão de arrancamento é calculada usando a mesma expressão que relaciona a pressão interna com a força circunferencial em cilindros.

$$\sigma_3 = \frac{2 \times N_y}{D} \quad (2)$$

Onde D é o diâmetro do cilindro e N_y é a força resultante na direção circunferencial do revestimento.

Vamos deduzir as equações para calcular as forças N_x e N_y atuantes no revestimento. Antes, porém, deve ser lembrado que nos revestimentos cilíndricos, as direções locais 1 e 2 das lâminas coincidem respectivamente com as direções globais y e x. Não é necessário, portanto girar os alongamentos. As forças resultantes N_x e N_y são obtidas somando as forças parciais atuantes em todas as lâminas.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times t_{pic} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{pic} + \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix} \times t_{areia} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{areia}$$

$$+ \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \times t_r \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_r$$

Essas são as forças resultantes N_y e N_x atuando por unidade de comprimento do revestimento. Elas são calculadas multiplicando a rigidez das lâminas pelos respectivos alongamentos totais. Os alongamentos totais de cada lâmina são computados pela equação (1). As espessuras das lâminas são conhecidas. A tensão de arrancamento (pull-off) é calculada entrando a força resultante N_y na equação (2).

Exemplo 9. *Seja um tanque cilíndrico de concreto, revestido com camada base, fibras picadas e topcoat de resina. O sistema trabalha seco nas condições seguintes:*

2,0 mm é a espessura da base se areia

3,15 mm é a espessura de 3 mantas M450

0,6 mm é a espessura do liner com 2 véus

$t = 2,0 + 3,15 + 0,6 = 5,75$ mm é a espessura total do revestimento

$D = 3000$ mm é o diâmetro do tanque de concreto

$PT = 45C$ é o pico de cura da resina

$OT = 125C$ é a temperatura de trabalho do equipamento

$OT = CT = RT = 25C$ é a temperatura do revestimento no choque térmico

$\Delta m = 0$. O ambiente é seco

O tanque de concreto é tirado de serviço e imediatamente esfriado com água. Não existe, portanto, carga mecânica nesse caso. Vamos calcular o coeficiente de segurança contra descolamento sabendo que a resistência do concreto ao arrancamento é 20 kg/cm^2 .

Os alongamentos totais nas lâminas são calculados usando a equação (1) sem os alongamentos mecânicos.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_1(OT - PT) \\ \alpha_{sub}(OT - RT) - \alpha_2(OT - PT) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta m \\ -\beta_2 \Delta m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-6}(125 - 25) - \alpha_1(25 - 45) \\ 13 \times 10^{-6}(125 - 25) - \alpha_2(25 - 45) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \times 0 \\ -\beta_2 \times 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 20 \times \alpha_1 \\ 0,0013 + 20 \times \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para as lâminas de fibras picadas

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{pic} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 20 \times 25 \times 10^{-6} \\ 0,0013 + 20 \times 25 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0018 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de areia

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{areia} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 20 \times 13 \times 10^{-6} \\ 0,0013 + 20 \times 13 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0016 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para a lâmina de resina

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 0,0013 + 20 \times 60 \times 10^{-6} \\ 0,0013 + 20 \times 60 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,0025 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As forças N_x e N_y são

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times 0,315 \times \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0018 \\ 0 \end{bmatrix}_{pic} + \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix} \times 0,2 \times \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0016 \\ 0 \end{bmatrix}_{areia} +$$

$$\begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \times 0,06 \times \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,0025 \\ 0 \end{bmatrix}_r$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90,7 \\ 90,7 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}$$

Conhecendo N_y , podemos calcular a tensão de arrancamento

$$\sigma_3 = \frac{2 \times N_y}{D} = \frac{2 \times 90,7}{300} = 0,60 \text{ kg/cm}^2$$

O coeficiente de segurança contra arrancamento é

$$CS = \frac{20}{0,60} = 33$$

A resultante N_y é transferida sem problemas ao substrato pela tensão de arrancamento σ_3 . Não existe a possibilidade de descolamento do revestimento.

A resultante axial N_x é transferida ao substrato por cisalhamento nas bordas do revestimento. O protocolo de cálculo de tensões de cisalhamento foi desenvolvido no capítulo 17 do livro que trata de tubulações de compósitos.

A tensão de cisalhamento causada pela força N_x , de acordo com o acima citado capítulo 17, é

$$\tau_x = N_x \times \frac{\sqrt{G_r/E_x^r}}{t_r}$$

Onde o índice “r” indica os módulos e a espessura do revestimento.

Para calcular os módulos do revestimento, temos que computar sua matriz de rigidez $[A]$

$$[A] = \begin{bmatrix} 77000 & 23000 & 0 \\ 23000 & 77000 & 0 \\ 0 & 0 & 27000 \end{bmatrix} \times 0,315 + \begin{bmatrix} 66000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66000 & 0 \\ 0 & 0 & 23000 \end{bmatrix} \times 0,2 + \begin{bmatrix} 33000 & 10000 & 0 \\ 10000 & 33000 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 \end{bmatrix} \times 0,06$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 39435 & 11845 & 0 \\ 11845 & 39435 & 0 \\ 0 & 0 & 13795 \end{bmatrix}$$

Conhecida a matriz de rigidez $[A]$, os módulos são

$$E_x^r = \frac{1}{0,575} \times \left(39435 - \frac{11845^2}{39435} \right) = 62400 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_r = \frac{13795}{0,575} = 24000 \text{ kg/cm}^2$$

A tensão de cisalhamento causada pela força N_x na borda do revestimento é

$$\tau_x = N_x \times \frac{\sqrt{G_r/E_x^r}}{t_r}$$

$$\tau_x = 90,7 \times \frac{\sqrt{24000/62400}}{0,575} = 84,0 \text{ kg/cm}^2$$

Essa tensão deve ser comparada com a resistência ao cisalhamento do concreto.

O caso estudado neste exemplo pode ser considerado crítico, porque supõe as piores condições encontradas em uso. Aliás, piores até que as encontradas em uso, porque não recomendamos esfriar bruscamente revestimentos secos. A temperatura de trabalho é alta (125C), o revestimento tem grande espessura (5,75 mm) e trabalha seco. Mesmo assim, o coeficiente de segurança contra arrancamento é muito alto. Quanto ao cisalhamento nas bordas, pode ser que os substratos de concreto não tenham resistência suficiente. Esses casos raríssimos, se ocorrerem, exigem reparos nas bordas danificadas.

Concluindo, podemos dizer que os revestimentos não descolam dos substratos mesmo sob condições de choques térmicos extremos.

Capítulo 12

Atmosferas explosivas

1 – Introdução. Por serem maus condutores, os equipamentos de compósitos demoram para dissipar as cargas eletrostáticas geradas em líquidos armazenados, manuseados ou transportados neles. Essa particularidade cria preocupações com o uso desses equipamentos em presença de atmosferas inflamáveis e sujeitas a explosões causadas pela descarga de cargas acumuladas.

Esta monografia explica o mecanismo de geração e acumulação de cargas elétricas em líquidos inflamáveis e sujeitos a explosão quando armazenados, manuseados ou transportados em equipamentos isolantes, como os de compósitos. As recomendações que seguem têm como base o documento API 2003.

API 2003: Protection against ignition arising out of static, lightning and stray currents. sixth edition, 1988.

As discussões que seguem assumem o pior cenário possível, representado pelo manuseio de líquidos voláteis e não condutores.

2 – Geração e dissipação de cargas estáticas. Cargas eletrostáticas são geradas sempre que dois corpos de materiais diferentes são separados bruscamente, como acontece quando eles são atritados um contra o outro. Essa situação ocorre no transporte de líquidos em tubulações, onde a diferença de condutividade entre o material da tubulação e o produto conduzido provoca desequilíbrio nas cargas contidas neles. Um dos materiais recebe a carga $+ \Delta Q$ e o outro a carga $- \Delta Q$.

As tubulações metálicas cedem elétrons, ficando carregadas positivamente. Os líquidos conduzidos recebem elétrons, adquirindo a carga negativa $- \Delta Q$. A taxa de geração dessas cargas aumenta com o atrito, isto é, com a velocidade do líquido transportado na tubulação. A transferência de elétrons ocorre também no sentido oposto, dissipando o desequilíbrio das cargas. O acúmulo de cargas nos dois corpos cessa quando a taxa de dissipação se torna igual à de geração. No momento da estabilização, a tubulação acumula carga positiva $+ Q$ e o líquido transportado acumula carga negativa $- Q$.

As tubulações metálicas são aterradas para descarregar a carga + Q para a terra. O líquido transportado, porém, retém a carga – Q. Se o líquido transportado for isolante, como estamos supondo nessa monografia, a carga – Q permanece nele por longo tempo antes de ser dissipada.

Depois de transportado, o líquido com carga – Q é descarregado em tanques neutros, sem carga. Nesse momento quatro situações podem acontecer, dependendo das condutividades elétricas do tanque e do líquido despejado nele.

	<i>Líquido</i>	
	<i>Condutor</i>	<i>Isolante</i>
<i>Tanque condutor (aço)</i>	<i>Dissipação imediata da carga acumulada – Q. Essa situação não oferece risco de explosão</i>	<i>A dissipação lenta da carga – Q exige algumas precauções, todas bem explicadas na API 2003.</i> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Fazer enchimento com velocidade lenta</i> • <i>Evitar promotores de centelha.</i> • <i>Interligar e aterrar todas peças metálicas</i> • <i>etc</i>
<i>Tanque isolante (compósitos)</i>	<i>Os tanques isolantes, como os de compósitos ou os de aço revestidos com compósitos, requerem medidas especiais para dissipar a carga – Q.</i> <i>Essas medidas especiais são discutidas nesta monografia.</i>	

3 – Ocorrência de centelhas. As centelhas, ou faíscas, são produzidas pela ionização do ar entre dois corpos próximos e submetidos a altas diferenças de potencial elétrico. O campo elétrico resultante da alta diferença de potencial ioniza o ar, permitindo a passagem de carga elétrica. A faísca é gerada pelo ar ionizado. O documento API 2003 reconhece dois tipos de centelhas.

- *Centelha entre metais condutores submetidos a voltagens diferentes. Essas centelhas podem ser evitadas interligando e aterrando todas peças metálicas presentes no sistema.*
- *Centelha entre líquidos armazenados e peças metálicas. Esse tipo de centelha recebe o nome especial de “brush spark”, tendo grande probabilidade de ocorrer nas operações de manuseio e armazenamento de líquidos inflamáveis e isolantes.*

As práticas recomendadas pela API 2003 explicam com detalhes as precauções a ser tomadas para evitar esses dois tipos de centelhas. Esta monografia trata das recomendações para tanques não condutores, feitos de compósito ou revestidos com compósitos. As recomendações da API 2003 para tanques de aço não serão tratadas em detalhe aqui.

A carga – Q acumulada no fluido armazenado pode ser relacionada à diferença de potencial V pela relação

$$C = \frac{Q}{V}$$

Onde

C é a capacitância do sistema

Q é a carga acumulada

V é a diferença de voltagem entre o líquido armazenado e o tanque

Na equação acima, a capacitância C é uma constante que depende unicamente da geometria do sistema tanque-combustível. Seu valor é muito pequeno, o que implica na possibilidade de altas voltagens com pouca carga.

No caso de tanques metálicos, as pequenas cargas acumuladas – Q são dissipadas do líquido para o metal, e dele para a terra. Os líquidos, mesmo os isolantes, não acumulam cargas por muito tempo quando colocados em contato com metais aterrados. Isso pode ser explicado considerando a pequena magnitude da carga Q a ser dissipada. As correntes elétricas envolvidas nesse processo são extremamente pequenas, de modo que a dissipação de cargas acontece mesmo quando a resistência é muito grande. A resistência de aterramento aceita na norma API 2003 é enorme, 1 megaohm.

As faíscas geradas por cargas de pequena magnitude têm baixa energia e envolvem correntes pequenas.

4 – Ocorrência de explosão. Nem todas centelhas causam explosões. Para ocorrer explosão, a centelha deve ter energia suficiente para iniciar a combustão da mistura vaporizar. Como dissemos, as centelhas geradas na descarga eletrostática têm energias muito pequenas, mesmo sendo as diferenças de voltagens da ordem de milhares de volts.

A energia de descarga das centelhas pode ser reduzida a valores insignificantes interligando e aterrando todas partes metálicas do sistema. A interligação simples das partes metálicas, sem aterramento, implica em maiores diferenças de voltagem e mais energia descarregada nas centelhas. Isso é explicado no exemplo 1.

Exemplo 1. *Explique porque as partes metálicas dos sistemas de armazenamento de combustíveis inflamáveis devem ser interligadas e aterradas.*

Tomando a terra como referência, o fluido inflamável tem carga – Q e potencial – V . As partes metálicas não aterradas têm carga + Q e potencial + V .

A diferença de potencial entre o fluido e as partes metálicas interligadas e não aterradas é

$$\Delta V = V - (-V) = 2V$$

A diferença de potencial entre o fluido e as partes metálicas interligadas e aterradas é

$$\Delta V = V - 0 = V$$

A energia acumulada em sistemas onde as partes metálicas são simplesmente interligados é muito maior que a acumulada em sistemas onde essas partes são interligadas e aterradas.

5 – Tanques de aço. Dissipação das cargas estáticas. A API 2003 mostra que a explosão de líquidos inflamáveis e isolantes, contidos em tanque metálicos, pode ser evitada tomando medidas corriqueiras, como

- *Uso de tubulação de grande diâmetro, para reduzir a velocidade do fluido e a carga Q*
- *Interligação e aterramento de todas peças metálicas*
- *Eliminação de impacto do fluido no fundo do tanque*
- *Eliminação de geradores de centelhas*

- Etc....

As medidas acima são suficientes para proteger tanques metálicos contendo fluidos isolantes e inflamáveis.

Mas não são suficientes para tanques isolantes, como os feitos de compósitos, ou os metálicos revestidos com compósitos. Nesses casos, a baixa taxa de dissipação da carga – Q pode ser preocupante. O problema é a lenta dissipação da carga – Q em tanques isolantes. Vamos ver como a norma API 2003 resolve esse problema para tanque de compósitos e para tanques metálicos revestidos com compósitos.

6 – Tanques de compósitos. Dissipação das cargas estáticas. Os tanques isolantes de compósitos conduzem elétrons com dificuldade, requerendo tempos muito longos para dissipar a carga – Q acumulada no fluido contido neles. Essa demora é mais acentuada se o fluido armazenado também for isolante.

A presença de líquidos carregados com carga interna – Q polariza as moléculas da resina dos tanques de compósitos, induzindo a carga negativa – q na superfície externa deles. Essa carga induzida – q – cria uma situação de risco de centelha em atmosferas inflamáveis externas.

Portanto, quando usados para conter produtos inflamáveis e não-condutores, os tanques de compósitos podem apresentar descargas com centelhas na superfície interna (causadas pela carga – Q acumulada no fluido) e na superfície externa, causadas pela carga induzida – q.

As recomendações da API 2003 para solucionar esses dois problemas em tanques de compósitos, são:

6.1 – Dissipação da carga induzida – q. Essa dissipação é feita por tela metálica embutida nas superfícies externas do costado, do fundo e da tampa dos tanques. Essa tela metálica forma uma gaiola condutora envolvendo o tanque que, quando aterrada, dissipa a carga externa induzida – q.

A tela metálica externa pode ser substituída por topcoat externo carregado com 33% de grafite, ou pela laminação externa de um tecido de fibras de carbono. Obviamente, essas lâminas condutivas externas – de grafite ou de fibras de carbono – devem ser devidamente aterradas.

6.2 – Dissipação da carga acumulada – Q. Essa dissipação é feita por chapas metálicas imersas no líquido armazenado. Essas chapas são colocadas no fundo do tanque, para ter contato permanente e pleno com o fluido armazenado. Segundo o documento API 2003, a superfície mínima dessas chapas deve ser computada para ter 194 cm² para cada 379 litros de fluido. Usando essa informação, a superfície mínima da chapa pode ser computada pela fórmula

$$A = \frac{\pi \times D^2}{4} \times H \times 1000 \times \frac{1}{379} \times 194 \times \frac{1}{10\,000}$$

$$A = 0,04 \times D^2 \times H$$

Onde

A é a superfície mínima da chapa, em m²

D é o diâmetro do tanque de compósitos, em m

H é a altura do tanque de compósitos, em m

Obviamente, a chapa metálica deve ser devidamente aterrada para dissipar a carga – Q.

Exemplo 2. Determinar a área mínima das chapas de aço a ser colocadas no fundo de tanque de compósito para dissipar a carga – Q acumulada em fluido inflamável e não-condutor. O tanque tem diâmetro $D = 5\text{ m}$ e altura $H = 10\text{ m}$.

A superfície mínima das chapas de aço deve ser

$$A = 0,04 \times D^2 \times H$$

$$A = 0,04 \times 5^2 \times 10 = 10\text{ m}^2$$

7 – Dissipação da carga – Q em tanques metálicos revestidos com compósitos. De acordo com a API 2003, os revestimentos com espessura menor que 2,0 mm são considerados condutores. Os tanques de aço com revestimentos de espessura menor que 2,0 mm devem ser tratados como descrito no item 5, que contempla tanques metálicos em contato direto com o líquido armazenado. Apenas os revestimentos de espessura maior que 2,0 mm são considerados isolantes.

Geralmente os revestimentos de compósitos têm espessura maior que 4,0 mm, sendo por isso considerados isolantes. O protocolo de proteção mandado pela API para tanques metálicos revestidos internamente com compósitos isolantes é idêntico ao apresentado no item 6 para tanques construídos integralmente em compósitos, exceto que a tela metálica externa é dispensada.

A dissipação da carga interna – Q em tanques metálicos revestidos é feita como indicado no item 6, colocando no fundo do tanque uma chapa metálica devidamente aterrada e com superfície mínima

$$A = 0,04 \times D^2 \times H$$

Onde

A é a superfície mínima da chapa, em m²

D é o diâmetro do tanque revestido, em m

H é a altura do tanque revestido, em m

8 – Dissipação da carga – Q em tanques parcialmente revestidos. Muitas vezes os tanques metálicos de grandes dimensões são revestidos parcialmente, cobrindo com compósito apenas o fundo e o rodapé até a altura $h = 60\text{ cm}$. O resto do tanque, com altura $H - h$ é deixado sem revestimento. Nesses casos, o líquido contido no volume até a altura do rodapé, $h = 60\text{ cm}$, fica sem contato com metal, tendo dificuldade para dissipar cargas estáticas.

Os tanques parcialmente revestidos não são tratados na API 2003, mas podem ser protegidos usando as mesmas recomendações feitas para tanques metálicos totalmente revestidos.

A área da superfície da chapa a ser colocada no fundo do tanque para dissipar a carga estática acumulada no líquido contido no volume revestido e sem proteção, deve ser

$$A = 0,04 \times D^2 \times h$$

Onde

A é a superfície mínima da chapa, em m²

D é o diâmetro do tanque parcialmente revestido, em m

h é a altura do rodapé revestido, em m

Exemplo 3. Determinar a área mínima da chapa de aço a ser colocada no fundo de um tanque metálico parcialmente revestido. O tanque tem diâmetro $D = 20$ m e a altura do rodapé é $h = 60$ cm.

A superfície mínima da chapa de aço deve ser

$$A = 0,04 \times D^2 \times h$$

$$A = 0,04 \times 20^2 \times 0,6 = 9,6 \text{ m}^2$$

A área da chapa metálica calculada no exemplo 3 deve incluir todas superfícies metálicas abaixo da altura “h” do rodapé. Assim, toda superfície de tubulação ou de qualquer outra estrutura metálica submersa abaixo da altura “h” do rodapé, deve ser deduzida da área calculada.

$$A = 0,04 \times D^2 \times h - (\text{área metálica submersa abaixo de } h)$$

9 – Conclusão. Este capítulo descreveu as precauções para evitar explosões por descarga elétrica em líquidos inflamáveis contidos em tanques isolantes de compósitos ou em tanques metálicos revestidos total ou parcialmente com compósitos.

As considerações neste documento têm como base a norma API 2003.

Capítulo 13

Especificando laminados

1 – Introdução. A espessura e a composição real de laminados são conhecidas apenas depois deles ficarem prontos. Variáveis como esmero na execução, qualidade das matérias-primas, temperatura, capacidade dos equipamentos, treinamento do pessoal, etc, afetam a composição e a espessura real dos laminados, que nunca são exatamente iguais às idealizadas pelo projetista. Também importante é a vontade do fabricante, que pode, por exemplo, reduzir a quantidade de resina especificada no projeto. Esses fatos dificultam a ação do projetista que, não conhecendo a composição final do laminado, não sabe que propriedades usar para dimensionar os equipamentos. Essa é uma situação interessante.... Para dimensionar o equipamento, o projetista precisa conhecer sua composição. Mas essa composição só é conhecida depois do equipamento pronto.

Vimos nos capítulos anteriores como resolver esse problema usando o conceito de lâminas padrão. O projetista supõe os laminados construídos com lâminas padrão de propriedades conhecidas. A partir das lâminas padrão, ele computa as propriedades virtuais do equipamento usando a equação das espessuras. As propriedades reais, se desejadas, podem ser computadas depois do equipamento pronto, fazendo a queima do laminado e usando a equação dos teores. Os conceitos de lâminas padrão, assim como das equações que dão as propriedades mecânicas dos laminados, foram ampla e completamente discutidos nos capítulos anteriores.

Portanto, o projetista dimensiona os equipamentos usando as propriedades mecânicas de laminados virtuais feitos com lâminas padrão. Mas, como dito, a capacidade do processo de fabricação, a qualidade das matérias-primas e até a vontade do fabricante produzem laminados diferentes dos projetados. Por exemplo, se a máquina usada para fazer enrolamento cruzado não for capaz de ajuntar e compactar as fibras UD, os espaços vazios entre elas são ocupados por resina, o que reduz o teor de fibras. Ou ao contrário, se as fibras UD forem muito compactadas, espremidas para ter poucos espaços vazios entre elas, a quantidade de resina é reduzida. O teor de resina de laminados produzidos por enrolamento depende também da tensão de puxamento das fibras. As fibras muito tensionadas espremem a resina, produzindo laminados secos. A viscosidade da resina também afeta os teores. Resinas com altas viscosidades produzem lâminas com baixos teores de vidro e vice-versa.

Essas variações são esperadas e não devem ser causa de preocupação. Se o laminado for construído com as quantidades de fibras e de areia especificadas pelo projetista, seu desempenho é praticamente independente das quantidades de resina. Na prática, o projetista não adota diferentes

composições para acomodar máquinas ou resinas diferentes. O que ele faz é adotar lâminas padrão, que são usadas para dimensionar qualquer laminado em todas as situações. Uma vez definido o laminado padrão, o projetista determina as quantidades de fibras requeridas por metro quadrado e essas quantidades são especificadas por ele. A espessura e o teor de resina do laminado final, depois de produzido, são irrelevantes. O desempenho dos laminados é controlado pelas quantidades de fibras e de areia contidas neles. Essas quantidades, fixadas pelo projetista, especificam os laminados.

2 – Especificando laminados. Os laminados nunca devem ser especificados citando espessuras e teores. A especificação de espessuras e de teores impõe restrições severas, desnecessárias e impossíveis de cumprir pelos fabricantes. Os laminados devem ser especificados pelas quantidades de fibras e de areia expressas em kg/m^2 . A quantidade de resina é deixada livre, para o fabricante acomodar seu processo, suas matérias primas e suas preferências.

A especificação de laminados segue o seguinte protocolo:

- *O projetista arbitra as lâminas padrão e suas espessuras. Essa escolha é livre. Como regra, é aconselhável que o projetista adote as lâminas padrão citadas no capítulo 1 deste livro, que têm espessuras e propriedades próximas dos valores reais. Isso, porém, é irrelevante. A escolha do projetista é arbitrária.*
- *O projetista determina as propriedades do laminado usando as fórmulas das espessuras desenvolvidas nos capítulos anteriores.*
- *O projetista usa as propriedades do laminado proposto e verifica se elas atendem às necessidades da aplicação. Se não atenderem, ele deve fazer novas tentativas. Geralmente 3 tentativas são suficientes.*
- *O projetista determina as quantidades de fibras e de areia (se usada) necessárias por metro quadrado do laminado. Essas quantidades especificam o laminado.*

3 – As quantidades de fibras e de areia. Vimos no capítulo 2 como calcular as quantidades de matérias primas correspondentes às espessuras das lâminas padrão. O texto que segue foi importado do capítulo 2.

“As quantidades de material por metro quadrado, correspondentes às espessuras padrão das lâminas, são

$$Q_{pic} = 0,30 \times 1,43 \times t_{pic} = 0,43 \times t_{pic}$$

Onde $1,43 \text{ g/cm}^3$ é a densidade da lâmina padrão feita com 30% de fibras picadas

$$Q_{UD} = 0,70 \times 1,93 \times t_{UD} = 1,35 \times t_{UD}$$

Onde $1,93 \text{ g/cm}^3$ é a densidade da lâmina padrão UD feita com 70% de fibras de vidro

$$Q_{areia} = 0,80 \times 2,11 \times t_{areia} = 1,69 \times t_{areia}$$

Onde $2,11 \text{ g/cm}^3$ é a densidade da lâmina padrão feita com 80% de areia.

$$Q_{res} = 1,43 \times t_{pic} \times 0,7 + 1,93 \times t_{UD} \times 0,3 + 2,11 \times t_{areia} \times 0,2 + 1,20 \times t_r$$

$$Q_{res} = t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r$$

As equações acima computam as quantidades de material correspondentes às espessuras arbitradas pelo projetista. As lâminas de tecido e de mantas têm pesos por metro quadrado bem definidos e não precisam de equações como essas.

Os teores de fibras, de areia e de resina do laminado virtual proposto pelo projetista podem ser calculados a partir das quantidades de materiais arbitradas por ele.

O peso do laminado virtual por metro quadrado é

$$Q = Q_{pic} + Q_{UD} + Q_{areia} + Q_{res}$$

Os teores são, por definição

$$(pic) = \frac{Q_{pic}}{Q}$$

$$(UD) = \frac{Q_{UD}}{Q}$$

$$(areia) = \frac{Q_{areia}}{Q}$$

$$(res) = \frac{Q_{res}}{Q}$$

Os laminados são definidos pelas gramaturas (kg/m^2) de fibras e de areia especificadas pelo projetista. Os fabricantes podem usar as quantidades de resina que bem desejarem, mas devem executar os laminados com as quantidades de fibras e de areia especificadas. A justificativa para isso foi dada no capítulo 3, onde dissemos que se as quantidades de fibras e de areia por metro quadrado forem constantes, a equivalência estrutural dos laminados é garantida pela relação

$$(E \times t)_{real} = (E \times t)_{padrão} = (E \times t)_{arbitrado}$$

Acabamos de ver como o projetista dimensiona e especifica laminados ainda não existentes.

Algumas vezes ocorre a situação oposta, quando o laminado é dado (conhecido) e sua capacidade estrutural precisa ser determinada. O procedimento nesses casos é o mesmo descrito acima, exceto que as propriedades mecânicas de laminados reais são computadas usando a equação dos teores em lugar da equação das espessuras.

Exemplo 1. O projetista arbitrou um laminado hoop-chop de 15,6 mm de espessura com a construção seguinte.

Resina	$t_r = 0,6 \text{ mm}$
Fibras picadas	$t_{pic} = 4,0 \text{ mm}$
Fibras UD	$t_{UD} = 5,0 \text{ mm}$
Areia	$t_{areia} = 6,0 \text{ mm}$
Espessura total	$t = 15,6 \text{ mm}$.

O fabricante não trabalha com espessuras de lâminas. Ele precisa conhecer as quantidades de materiais correspondentes a essas espessuras. Usando as equações anteriores, obtemos

$$Q_{pic} = 0,43 \times t_{pic} = 0,43 \times 4,0 = 1,72 \text{ kg/m}^2$$

$$Q_{UD} = 1,35 \times t_{UD} = 1,35 \times 5,0 = 6,75 \text{ kg/m}^2$$

$$Q_{areia} = 1,69 \times t_{areia} = 1,69 \times 6,0 = 10,14 \text{ kg/m}^2$$

$$Q_{res} = t_{pic} + 0,58 \times t_{UD} + 0,42 \times t_{areia} + 1,20 \times t_r$$

$$Q_{res} = 4,0 + 0,58 \times 5,0 + 0,42 \times 6,0 + 1,20 \times 0,6 = 10,14 \text{ kg/m}^2$$

O peso do laminado é obtido somando os pesos das fibras, da areia e da resina

$$\text{Peso do laminado} = 1,72 + 6,75 + 10,14 + 10,14 = 28,75 \text{ kg/m}^2.$$

Com essas informações o fabricante calcula os teores de fibras, de areia e de resina do laminado virtual. Essa informação serve para comparar o laminado fabricado com o especificado.

$$(pic) = \frac{1,72}{28,75} = 5,98\%$$

$$(UD) = \frac{6,75}{28,75} = 23,48\%$$

$$(areia) = \frac{10,14}{28,75} = 35,27\%$$

$$(res) = \frac{10,14}{28,75} = 35,27\%$$

O conhecimento desses teores serve para comparar os laminados produzidos com o especificado.

Exemplo 2. *Use o laminado virtual do exemplo 1 para mostrar que as equações dos teores dão os mesmos resultados que as equações das espessuras.*

Essas equações foram discutidas no capítulo 2. Vamos iniciar com as equações dos teores

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40(res)} \right] \begin{bmatrix} 163000(pic) + 0,74E_{UD}^x(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 163000(pic) + 0,74E_{UD}^y(UD) + 35500(areia) + 25000 \times K \\ 62900(pic) + 0,74G_{UD}(UD) + 13600(areia) + 9610 \times K \end{bmatrix}$$

Onde

$$K = (res) - \left[\frac{3}{7}(UD) + \frac{7}{3}(pic) + \frac{2}{8}(areia) \right] \text{ é a secura do laminado}$$

A secura do laminado nesse caso é

$$K = 0,3527 - \left[\frac{3}{7} \times 0,2348 + \frac{7}{3} \times 0,0598 + \frac{2}{8} \times 0,3527 \right] = 0,02$$

A secura é ligeiramente positiva, refletindo a presença de resina no liner e no topcoat

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \left[\frac{3,12}{1,20 + 1,40 \times 0,3527} \right] \begin{bmatrix} 163000 \times 0,0598 + 0,74 \times 100000 \times 0,2348 + 35500 \times 0,3527 + 25000 \times 0,02 \\ 163000 \times 0,0598 + 0,74 \times 400000 \times 0,2348 + 35500 \times 0,3527 + 25000 \times 0,02 \\ 62900 \times 0,0598 + 0,74 \times 35000 \times 0,2348 + 13600 \times 0,3527 + 9610 \times 0,02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74000 \\ 170000 \\ 27320 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Vamos usar agora as equações das espessuras

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^x \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^x \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ E_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + E_{tec}^y \times \frac{t_{tec}}{t} + E_{UD}^y \times \frac{t_{UD}}{t} + E_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + E_r \times \frac{t_r}{t} \\ G_{pic} \times \frac{t_{pic}}{t} + G_{tec} \times \frac{t_{tec}}{t} + G_{UD} \times \frac{t_{UD}}{t} + G_{areia} \times \frac{t_{areia}}{t} + G_r \times \frac{t_r}{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \times \frac{4,0}{15,6} + 100000 \times \frac{5,0}{15,6} + 60000 \times \frac{6,0}{15,6} + 30000 \times \frac{0,6}{15,6} \\ 70000 \times \frac{4,0}{15,6} + 400000 \times \frac{5,0}{15,6} + 60000 \times \frac{6,0}{15,6} + 30000 \times \frac{0,6}{15,6} \\ 27000 \times \frac{4,0}{15,6} + 35000 \times \frac{5,0}{15,6} + 23000 \times \frac{6,0}{15,6} + 11500 \times \frac{0,6}{15,6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ G_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74230 \\ 170384 \\ 27430 \end{bmatrix} \text{ kg/cm}^2$$

Comparando os resultados, notamos uma pequena diferença, devida a erros de aproximação nos valores das densidades das lâminas.

Capítulo 14

Resistência de tubos UD55

1 – Introdução. Os envelopes de falha propostos na norma ISO 14692 para tubos usados na indústria de óleo e gás são complexos, artificiais e imprecisos. Neste capítulo vamos apresentar um protocolo de cálculo mais preciso e fácil de usar que esses envelopes.

2 – A equação geral. A equação geral (1) computa as deformações mecânicas totais em estruturas cilíndricas submetidos simultaneamente a pressão interna, torque, forças axiais e forças circunferenciais.

$$\begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4} + N_x \\ \frac{P \times \Phi}{2} + N_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde

x é a direção axial

y é a direção circunferencial

P é a pressão interna

Φ é o diâmetro interno

N_x é a força axial por unidade de comprimento

N_y é a força circunferencial por unidade de comprimento

T é o torque

[*A*] é a matriz de rigidez do laminado.

[*ε*] é a matriz de deformações globais

A equação (1) é geral e válida para qualquer estrutura de seção circular cilíndrica. O protocolo para calcular essa matriz foi proposto nos capítulos iniciais deste livro. A equação (1) computa as deformações mecânicas globais para o carregamento externo de membrana mais completo possível em estruturas cilíndricas de seção circular. Para facilitar a apresentação, nossa discussão exclui cargas mecânicas de flexão.

3 – Laminados cruzados. A equação (1) para laminados cruzados e balanceados é

$$\begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4} + N_x \\ \frac{P \times \Phi}{2} + N_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}_{55} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Quando particularizada para laminados cruzados UD55, a matriz de rigidez acima é

$$[A] = \begin{bmatrix} 132470 & 96220 & 0 \\ 96220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times [t] \text{ kg/cm} \quad (2)$$

Onde t é a espessura total do laminado UD55.

Entrando (2) em (1), obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4} + N_x \\ \frac{P \times \Phi}{2} + N_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132470 & 96220 & 0 \\ 96220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times [t] \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dividindo os dois membros da equação acima pela espessura total t, obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4 \times t} + \sigma_x \\ \frac{P \times \Phi}{2 \times t} + \sigma_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2 \times t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132470 & 96220 & 0 \\ 96220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

A equação (4) é a mesma equação (3), expressa em termos de tensões. Ela vale apenas para laminados UD55.

4 – Análise das deformações. Os laminados de compósitos devem ser analisados preferencialmente em termos de deformações, ao invés de tensões médias. As razões para isso são

1 – *As deformações de falha são propriedades das lâminas, independentes das relações de Poisson do laminado. Os envelopes de falha de lâminas expressos em termos de alongamento são retangulares. Os expressos em termos de tensões são elípticos.*

2 – *Ao contrário das tensões, que variam com o tipo de lâmina, os alongamentos globais têm o mesmo valor para todas elas.*

Os alongamentos mecânicos globais são computados invertendo a equação (4)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132470 & 96220 & 0 \\ 96220 & 235070 & 0 \\ 0 & 0 & 101220 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4 \times t} + \sigma_x \\ \frac{P \times \Phi}{2 \times t} + \sigma_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2 \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.07 & -0.44 & 0 \\ -0.44 & 0.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 \end{bmatrix} \times [10^{-5}] \times \begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4 \times t} + \sigma_x \\ \frac{P \times \Phi}{2 \times t} + \sigma_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2 \times t} \end{bmatrix}$$

As deformações mecânicas globais devem ser giradas para os sistemas locais usando a matriz de rotação para lâminas UD55

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 & \pm 0.94 \\ 0.67 & 0.33 & \mp 0.94 \\ \mp 0.47 & \pm 0.47 & -0.34 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 & \pm 0.94 \\ 0.67 & 0.33 & \mp 0.94 \\ \mp 0.47 & \pm 0.47 & -0.34 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.07 & -0.44 & 0 \\ -0.44 & 0.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix} \times [10^{-5}] \times \begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4 \times t} + \sigma_x \\ \frac{P \times \Phi}{2 \times t} + \sigma_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2 \times t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.26 & \pm 0.47 \\ 0.57 & -0.09 & \mp 0.47 \\ \mp 1.42 & \pm 1.00 & -0.34 \end{bmatrix} \times [10^{-5}] \times \begin{bmatrix} \frac{P \times \Phi}{4 \times t} + \sigma_x \\ \frac{P \times \Phi}{2 \times t} + \sigma_y \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2 \times t} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde

P é a pressão interna.

Φ é o diâmetro do tubo

t é a espessura do tubo

σ_x é a tensão axial média

σ_y é a tensão circunferencial média

T é o torque.

A equação (5) dá as deformações das lâminas UD55 em seus sistemas locais. Essa equação é precisa e fácil de usar, ao contrário dos envelopes de falha propostos na ISO 14692.

As deformações totais são obtidas somando as deformações residuais térmicas e hídras às calculadas pela equação (5). A análise da durabilidade segue imediatamente dessas deformações, como explicado no livro “Durability of Industrial Composites”.

Vamos usar a equação (5) para computar as resistências de laminados UD55.

Exemplo 1 – ASTM D 2105, resistência axial. A carga externa nesse caso consiste apenas na tensão axial aplicada no ensaio de tração. Tomando $P = T = \sigma_y = 0$ na equação (5), obtemos

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.26 & \pm 0.47 \\ 0.57 & -0.09 & \mp 0.47 \\ \mp 1.42 & \pm 1.00 & -0.34 \end{bmatrix} \times [10^{-5}] \times \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expandindo essa matriz obtemos três valores para a resistência à tração axial de tubos UD55

$$\varepsilon_1 = 0.06 \times 10^{-5} \times \sigma_x$$

$$\varepsilon_2 = 0.57 \times 10^{-5} \times \sigma_x$$

$$\gamma_{12} = \mp 1.42 \times 10^{-5} \times \sigma_x$$

A primeira equação computa a resistência axial correspondente à ruptura das fibras. Supondo o alongamento de ruptura de lâminas UD na direção das fibras igual a 3,0%, temos

$$\sigma_x = \frac{0.03}{0.06 \times 10^{-5}} = 50\,000 \text{ kg/cm}^2$$

A segunda equação computa a resistência axial correspondente à ruptura na direção transversal às fibras. Temos nesse caso três cenários:

1. Resistência axial à infiltração. Esta resistência mede a tensão axial que falha o tubo por infiltração. Substituindo o alongamento ε_2 pelo umbral de infiltração, T_i , temos

$$\sigma_x = \frac{0.004}{0.57 \times 10^{-5}} = 700 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tubo de poliéster})$$

$$\sigma_x = \frac{0.005}{0.57 \times 10^{-5}} = 870 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tubo de DK 411})$$

2. Resistência axial à exudação. Esta resistência mede a tensão axial que falha o tubo por vazamento. Substituindo o alongamento ε_2 pelo umbral de exudação, T_w , temos

$$\sigma_x = \frac{0.0045}{0.57 \times 10^{-5}} = 790 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tubo de poliéster})$$

$$\sigma_x = \frac{0.0055}{0.57 \times 10^{-5}} = 960 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tubo de DK 411})$$

3. Resistência axial à ruptura. Esta resistência mede a tensão axial que rompe o tubo. Substituindo o alongamento ε_2 pelo umbral de ruptura, T_r , temos

$$\sigma_x = \frac{0.0070}{0.57 \times 10^{-5}} = 1200 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tubo de poliéster})$$

$$\sigma_x = \frac{0.0100}{0.57 \times 10^{-5}} = 1750 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tubo de DK 411})$$

A terceira equação diz respeito à falha por cisalhamento. Supondo $\gamma_{12} = 0.02$, temos

$$\sigma_x = \frac{0.02}{1.42 \times 10^{-5}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Como vemos, as falhas por infiltração e por exudação governam a resistência axial de tubos UD55.

Exemplo 2 – Resistência circunferencial medida por disco partido. A carga mecânica nesse caso é a tensão circunferencial aplicada pelo disco. As demais cargas são tomadas iguais a zero

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.26 & \pm 0.47 \\ 0.57 & -0.09 & \mp 0.47 \\ \mp 1.42 & \pm 1.00 & -0.34 \end{bmatrix} \times [10^{-5}] \times \begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expandindo a matriz acima obtemos três valores para a resistência circunferencial de tubos UD55

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 0.26 \times 10^{-5} \times \sigma_y \\ \varepsilon_2 &= -0.09 \times 10^{-5} \times \sigma_y \\ \gamma_{12} &= 1.00 \times 10^{-5} \times \sigma_y\end{aligned}$$

A primeira equação computa a resistência circunferencial correspondente à ruptura das fibras. Tomando, como no caso anterior $\varepsilon_1 = Tr = 0.03$, temos

$$\sigma_y = \frac{0.03}{0.26 \times 10^{-5}} = 11\,500 \text{ kg/cm}^2$$

A segunda equação diz respeito às falhas por exudação e infiltração. Os valores negativos – compressão – do alongamento nesses casos não causam esses tipos de falha.

A terceira equação diz respeito à falha por cisalhamento. Supondo $\gamma_{12} = 0.02$, temos

$$\sigma_y = \frac{0.02}{1.00 \times 10^{-5}} = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

A resistência circunferencial de tubos UD55 é governada por cisalhamento.

Exemplo 3 – Análise para torque. A resistência de tubos UD55 a torques é computada pela equação (5) tomando as tensões e a pressão iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.26 & \pm 0.47 \\ 0.57 & -0.09 & \mp 0.47 \\ \mp 1.42 & \pm 1.00 & -0.34 \end{bmatrix} \times [10^{-5}] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2 \times T}{\pi \times \Phi^2 \times t} \end{bmatrix}$$

A análise é óbvia e não será executada aqui.

Exemplo 4 – Carregamento completo. Vamos usar a equação (5) para computar os alongamentos mecânicos em tubos UD55 sujeitos ao seguinte carregamento.

$$\begin{aligned}P &= 70 \text{ kg/cm}^2 \\ t &= 7.6 \text{ mm} \\ T &= 10\,000 \text{ kg.cm} \\ \Phi &= 300 \text{ mm} \\ \sigma_x &= 100 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,06 & 0,26 & \pm 0,47 \\ 0,57 & -0,09 & \mp 0,47 \\ \mp 1,42 & \pm 1,00 & -0,34 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \times \begin{bmatrix} \frac{70 \times 300}{4 \times 7,6} + 100 \\ \frac{70 \times 300}{2 \times 7,6} \\ \frac{2 \times 10\,000}{\pi \times 30^2 \times 0,76} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,06 & 0,26 & \pm 0,47 \\ 0,57 & -0,09 & \mp 0,47 \\ \mp 1,42 & \pm 1,00 & -0,34 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 791 \\ 1381 \\ 9,3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 406,5 \pm 4,4 \\ 326,6 \mp 4,4 \\ \pm 357,8 - 3,2 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

O efeito do torque neste caso é pequeno, podendo ser ignorado. Os alongamentos mecânicos são, portanto

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 406,5 \\ 326,6 \\ \pm 357,8 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

Os alongamentos totais são obtidos somando aos mecânicos os componentes residuais térmicos e hídricos.

Apêndice

Os coeficientes de dilatação hídrica

Introdução. Os coeficientes de dilatação hídrica, os betas, são tratados na literatura clássica da mesma maneira que os coeficientes de dilatação térmica, o que é um equívoco, visto que eles têm natureza distinta. Este apêndice mostra que os coeficientes “betas” podem ser deduzidos usando as equações constitutivas das lâminas e o conceito de tensões livres. Primeiramente faremos a análise para uma lâmina genérica. Em seguida os valores dos “betas” serão particularizados para as lâminas específicas, introduzindo as respectivas matrizes de flexibilidade e fazendo outras considerações.

As fibras de vidro e as cargas inertes não absorvem água. A água é absorvida na resina matriz e na interfase vidro-resina. O incremento volumétrico causado na lâmina pela água absorvida é:

$$\frac{\Delta V}{V} = R_v \frac{\rho_r}{\rho_w} (\Delta m)_{lam} - \frac{V_0}{V}$$

Onde:

$\Delta V/V$ é o incremento volumétrico da lâmina

R_v é o teor volumétrico de resina na lâmina

ρ_r é a densidade da resina

ρ_w é a densidade da água

$(\Delta m)_{lam}$ é a água absorvida pela lâmina

V_0 é o volume de vazios na lâmina

Para computar os coeficientes de dilatação hídrica, o volume de vazios V_0 é suposto igual a zero, isto é, $V_0 = 0$. Assim, a equação acima simplifica para

$$\frac{\Delta V}{V} = R_v \frac{\rho_r}{\rho_w} (\Delta m)_{lam} \quad (1)$$

Esse incremento volumétrico gera alongamentos nas três direções principais da lâmina, que podem ser obtidos multiplicando a equação (1) pelos parâmetros de partição K .

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times R_V \times \frac{\rho_r}{\rho_w} \times (\Delta m)_{lam} \quad (2)$$

Os parâmetros de partição K_1 , K_2 e K_3 , devem ser determinados para cada lâmina. Eles satisfazem duas condições:

1. A soma deles deve ser igual à unidade, isto é, $K_1 + K_2 + K_3 = 1,00$
2. Eles são proporcionais aos alongamentos que lhes correspondem, isto é, K_1 é proporcional a ε_1 , K_2 é proporcional a ε_2 , etc.

Os coeficientes de dilatação hídrica são definidos pela relação:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times (\Delta m) \quad (3)$$

Onde Δm é a quantidade de água absorvida na resina. Os coeficientes de dilatação hídrica são obtidos combinando as equações (2) e (3).

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times R_V \times \frac{\rho_r}{\rho_w} \times \frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} \quad (4)$$

A equação (4) mostra que para calcular os betas das lâminas é preciso conhecer (a) os parâmetros de partição K , (b) o teor volumétrico de resina e (c) a relação entre as quantidades de água absorvidas pela lâmina e pela resina pura.

Os parâmetros de partição. A penetração de água nos laminados é resistida por tensões internas que crescem com a quantidade absorvida. Essas tensões são iguais em todas as direções, sendo descritas pela equação constitutiva

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma^H \\ \sigma^H \\ \sigma^H \end{bmatrix} \quad (5)$$

Desenvolvendo a equação (5)

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \right) \times \sigma^H \quad (6A)$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) \times \sigma^H \quad (6B)$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{13}}{E_1} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) \times \sigma^H \quad (6C)$$

As três equações (6) são válidas para qualquer lâmina. Elas computam os alongamentos na lâmina decorrentes da pressão hídrica causada na resina pela água penetrada. Esses alongamentos podem ser calculados usando os módulos e as relações de Poisson de cada lâmina. Por exemplo:

Para lâminas de fibras picadas

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \left(\frac{1-0,3-0,3}{E_1} \right) \times \sigma = \frac{0,4}{E_1} \times \sigma \quad \varepsilon_3 = \left(\frac{1,67-0,3-0,3}{E_1} \right) \times \sigma = \frac{1,07}{E_1} \times \sigma \quad \varepsilon_3 = 2,68 \times \varepsilon_1$$

Considerando que os parâmetros de partição são proporcionais aos alongamentos que lhes correspondem, e lembrando que a soma deles é igual a 1, obtemos:

$$K_3 = 2,68 \times K_1 \quad K_1 = K_2 \quad K_1 + K_2 + K_3 = 1,00$$

Os parâmetros K para as lâminas de fibras picadas são obtidos resolvendo este sistema. Fazendo as contas, obtemos

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}_{chop} = \begin{bmatrix} 0,21 \\ 0,21 \\ 0,57 \end{bmatrix}$$

Para laminas UD

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1-0,3-0,3}{E_1} \right) \times \sigma = 0,40 \times \frac{\sigma}{E_1} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1,70 \times \frac{\sigma}{E_1} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 4,25 \times \varepsilon_1$$

$$K_3 = 4,25 \times K_1 \quad K_3 = K_2 \quad K_1 + K_2 + K_3 = 1,00$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}_{UD} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,43 \\ 0,43 \end{bmatrix}$$

Para lâminas de areia e de resina pura

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \left(\frac{1-0,3-0,3}{E_1} \right) \times \sigma = \frac{0,4}{E_1} \times \sigma$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}_{sand} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}_{liner} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Para lâminas de escamas

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \left(\frac{1 - 0,13 - 0,3}{E_1} \right) \times \sigma = \frac{0,57}{E_1} \times \sigma \quad \varepsilon_3 = 1,40 \times \frac{\sigma}{E_1} \quad \varepsilon_3 = 2,46 \times \varepsilon_1$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}_{escamas} = \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,22 \\ 0,55 \end{bmatrix}$$

Esses são os parâmetros de partição das lâminas usadas comercialmente. Eles foram deduzidos das equações constitutivas de cada lâmina supondo que (a) a soma deles seja igual a 1, (b) que eles sejam proporcionais aos alongamentos que lhes são correspondentes e (c) que a água absorvida gere pressões hidrostáticas na lâmina. Essas suposições são intuitivas e óbvias.

Os teores volumétricos de resina nas lâminas comerciais padrão são conhecidos:

Para resina pura $Rv = 1,00$

Para lâmina de fibras picadas $Rv = 0,83$

Para lâminas de areia $Rv = 0,30$

Para lâminas com escamas de vidro $Rv = 0,90$

Para lâminas UD $Rv = 0,50$

A quantidade de água absorvida pelas lâminas pode ser obtida usando qualquer uma das três equações (6). Por exemplo, usando a equação (6A).

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \right) \times \sigma^H$$

$$\beta_1 \times (\Delta m)_{lam} = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \right) \times \sigma^H$$

$$(\Delta m)_{lam} = (1 - \nu_{12} - \nu_{13}) \times \frac{\sigma^H}{E_1 \beta_1}$$

A relação entre a quantidade de água absorvida pela lâmina e pela resina pura é:

$$\frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{resin}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{resin}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} \quad (7)$$

A tensão hídrica é uma propriedade termodinâmica do sistema água-resina, igual para todas lâminas. Note que ela foi cancelada e não aparece na equação (7).

Os betas. Os coeficientes de dilatação hídrica são obtidos entrando os parâmetros K, os teores volumétricos de resina e a expressão (7) na equação (4), que é repetida para facilitar a leitura.

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times R_V \times \frac{\rho_r}{\rho_w} \times \frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} \quad (4)$$

$$\beta_1 = K_1 R_V \frac{\rho_r}{\rho_w} \times \frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} \quad \beta_2 = K_2 R_V \frac{\rho_r}{\rho_w} \times \frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m}$$

$$\beta_3 = K_3 R_V \frac{\rho_r}{\rho_w} \times \frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} \quad \beta_{12} = 0$$

Vamos usar a equação (4) para calcular os betas das lâminas comerciais.

Lâmina de resina pura

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{1}{3}; \quad R_V = 1,0; \quad \frac{\rho_r}{\rho_w} = 1,20; \quad \frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = 1,0$$

Substituindo esses valores na equação (4)

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3} \times 1,0 \times 1,20 \times 1,0 = 0,40; \quad \beta_{12} = 0$$

Lâmina de fibras picadas

$$K_1 = 0,21; \quad K_2 = 0,21; \quad K_3 = 0,57; \quad R_V = 0,83; \quad \frac{\rho_r}{\rho_w} = 1,20;$$

$$\frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{re \sin}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{re \sin}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} = \frac{30 \times 0,40}{70 \times \beta_1} = \frac{0,171}{\beta_1}$$

Substituindo esses valores na equação (4)

$$\beta_1 = \beta_2 = 0,21 \times 0,80 \times 1,20 \times \frac{0,171}{\beta_1}; \quad \beta_3 = 0,57 \times 0,80 \times 1,20 \times \frac{0,171}{\beta_1};$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0,186; \quad \beta_3 = 0,504; \quad \beta_{12} = 0$$

Lâmina UD

$$K_1 = 0,10; \quad K_2 = 0,43; \quad K_3 = 0,43; \quad R_V = 0,50; \quad \frac{\rho_r}{\rho_w} = 1,20;$$

$$\frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{res \sin}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{res \sin}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} = \frac{(1 - 0,30 - 0,30) \times 30 \times 0,40}{(1 - 0,30 - 0,30) \times 400 \times \beta_1} = \frac{0,030}{\beta_1}$$

Substituindo esses valores na equação (4)

$$\beta_2 = \beta_3 = 0,43 \times 0,50 \times 1,20 \times \frac{0,030}{\beta_1}; \quad \beta_1 = 0,10 \times 0,50 \times 1,20 \times \frac{0,030}{\beta_1};$$

$$\beta_2 = \beta_3 = 0,182; \quad \beta_1 = 0,042; \quad \beta_{12} = 0$$

Lâmina de areia

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{1}{3}; \quad R_v = 0,30; \quad \frac{\rho_r}{\rho_w} = 1,20;$$

$$\frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{res}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{res}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} = \frac{(1 - 0,30 - 0,30) \times 30 \times 0,40}{(1 - 0,30 - 0,30) \times 60 \times \beta_1} = \frac{0,200}{\beta_1}$$

Substituindo esses valores na equação (4)

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3} \times 0,30 \times 1,20 \times \frac{0,200}{\beta_1}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,15$$

$$\beta_{12} = 0$$

Lâmina de escamas

$$K_1 = 0,22; \quad K_2 = 0,22; \quad K_3 = 0,55; \quad R_v = 0,90; \quad \frac{\rho_r}{\rho_w} = 1,20;$$

$$\frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{res \sin}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{res \sin}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} = \frac{(1 - 0,13 - 0,30) \times 30 \times 0,40}{(1 - 0,30 - 0,30) \times 30 \times \beta_1} = \frac{0,570}{\beta_1}$$

Substituindo esses valores na equação (4)

$$\beta_1 = \beta_2 = 0,22 \times 0,90 \times 1,20 \times \frac{0,570}{\beta_1}$$

$$\beta_3 = 0,55 \times 0,90 \times 1,20 \times \frac{0,570}{\beta_1};$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0,368; \quad \beta_3 = 0,920 \quad \beta_{12} = 0$$

A tabela 1 mostra os valores dos betas para as lâminas comerciais.

Lâmina	β_1	β_2	β_3	β_{12}
Resina pura	0,40	0,40	0,40	0,00
Fibras picadas	0,19	0,19	0,50	0,00
Escamas	0,37	0,37	0,92	0,00
Areia	0,15	0,15	0,15	0,00
UD	0,04	0,18	0,18	0,00

Tabela 1 Valores dos coeficientes de dilatação hídrica para lâminas comerciais. Esses valores são usados em todos exemplos numéricos deste livro

A expressão para calcular a pressão reativa exercida pela resina para impedir a absorção de água pode ser deduzida usando qualquer uma das três equações (6). Por exemplo, usando a primeira delas:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \right) \times \sigma^H$$

$$\beta_1 \times \Delta m = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \right) \times \sigma^H$$

$$\sigma^H = \frac{E_1 \times \beta_1 \times \Delta m}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})} \quad (8)$$

Exemplo 1. Calcule a tensão gerada na resina pela água absorvida. Suponha absorção $\Delta m = 0,01$.

Usando a equação (8) para lâmina de resina pura

$$\sigma^H = \frac{30000 \times 0,40 \times 0,01}{(1 - 0,30 - 0,30)} = 300 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Essa tensão é significativa. As resinas saturadas com água sofrem tensões internas de grande magnitude.

Exemplo 2. Calcule a quantidade de água absorvida pela resina embutida nas lâminas de uso comercial.

Usando a equação (7)

$$\frac{(\Delta m)_{lam}}{\Delta m} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{resin}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{resin}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} \quad (7)$$

$$(\Delta m)_{lam} = \frac{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{lam}}{(1 - \nu_{12} - \nu_{13})_{resin}} \times \frac{(E_1 \beta_1)_{resin}}{(E_1 \beta_1)_{lam}} \times \Delta m \quad (7A)$$

$$(\Delta m)_{chop} = \frac{(1 - 0,30 - 0,30)_{lam}}{(1 - 0,30 - 0,30)_{resin}} \times \frac{(30 \times 0,40)_{resin}}{(70 \times 0,186)_{lam}} \times \Delta m = 0,92 \times \Delta m$$

$$(\Delta m)_{sand} = \frac{(1 - 0,30 - 0,30)_{lam}}{(1 - 0,30 - 0,30)_{resin}} \times \frac{(30 \times 0,40)_{resin}}{(30 \times 0,283)_{lam}} \times \Delta m = 1,41 \times \Delta m$$

$$(\Delta m)_{tec} = \frac{(1 - 0,13 - 0,30)_{lam}}{(1 - 0,30 - 0,30)_{resin}} \times \frac{(30 \times 0,40)_{resin}}{(150 \times 0,140)_{lam}} \times \Delta m = 0,81 \times \Delta m$$

$$(\Delta m)_{UD} = \frac{(1-0,30-0,30)_{lam}}{(1-0,30-0,30)_{resin}} \times \frac{(30 \times 0,40)_{resin}}{(400 \times 0,042)_{lam}} \times \Delta m = 0,71 \times \Delta m$$

$$(\Delta m)_{escamas} = \frac{(1-0,13-0,30)_{lam}}{(1-0,30-0,30)_{resin}} \times \frac{(30 \times 0,40)_{resin}}{(30 \times 0,368)_{lam}} \times \Delta m = 1,55 \times \Delta m$$

Esses resultados mostram que a presença das fibras de vidro enrije as lâminas e reduz a absorção de água. Por exemplo, a quantidade de água absorvida pela resina embutida em lâminas UD é apenas 71% da absorvida pela resina pura.

O teor de vazios. A tabela 2 compara a quantidade de água absorvida em lâminas com a calculada e mostra que, ao contrário do previsto pela equação (7), as lâminas absorvem mais água que a resina pura. Esse excesso de água fica acumulado nos espaços vazios que foram ignorados na introdução deste trabalho. A água acumulada em vazios não gera tensões internas e não deve ser levada em conta no cálculo dos betas.

<i>Medições feitas @ 37C</i>			
<i>Lâmina</i>	<i>Δm medido</i>	<i>Δm previsto pela equação (7)</i>	<i>Erro</i>
<i>Resina pura</i>	<i>1,10%</i>	<i>1,10%</i>	<i>0,00</i>
<i>Fibras picadas</i>	<i>1,30%</i>	<i>0,92%</i>	<i>41,3%</i>
<i>Fibras tecidas</i>	<i>1,20%</i>	<i>0,81%</i>	<i>48,1%</i>
<i>UD</i>	<i>----</i>	<i>0,71%</i>	<i>----</i>

Tabela 2

Compara a absorção de água medida em lâminas com a prevista pela equação (7). A diferença é explicada pela água acumulada em vazios.

Exemplo 3. *Calculo do teor de vazios na lâmina de fibras picadas da tabela 2.*

O cálculo é feito igualando as expressões para o aumento relativo do volume.

$$\frac{\Delta V}{V} = R_v \frac{\rho_r}{\rho_w} (\Delta m)_{lam} - \frac{V_0}{V}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = R_v \frac{\rho_r}{\rho_w} (\Delta m)_{lam}$$

Para lâmina de fibras picadas $R_v = 0,80$. A densidade da resina é 1,20. A densidade da água é 1,00. As quantidades de água medidas e calculadas nos dois casos estão na tabela 2.

$$\frac{V_0}{V} = 1,20 \times 0,80 \times (1,30\% - 0,92\%) = 0,36\%$$

Esse é o teor de vazios na lâmina de fibras picadas.